

Wykorzystanie narzędzi TIK w matematyce

Przewodnik metodyczny
dla nauczycieli szkół podstawowych



Wykorzystanie narzędzi TIK w matematyce
Przewodnik metodyczny dla nauczycieli szkół podstawowych

Autorzy: Mgr. Václav Strnad
Mgr. Monika Mikulášková

Koordynator projektu: Łukasz Łój

Opracowanie graficzne i skład: Mgr. Veronika Chupáčová

Rok wydania: 2026

Przetłumaczono z czeskiego oryginału „Využití ICT nástrojů v matematice”

Publikacja powstała przy wsparciu finansowym Unii Europejskiej w ramach projektu nr 2023-1-CZ01-KA220-SCH-000164674, pt. Indukcyjne podejście do nauczania przedmiotów przyrodniczych i matematyki.



**Dofinansowane przez
Unię Europejską**

Przedstawione poglądy i stanowiska stanowią wyłącznie opinie autorów i nie muszą odzwierciedlać stanowiska Unii Europejskiej ani instytucji przyznającej grant (Dům zahraniční spolupráce, CZ). Za ich treść odpowiedzialność ponoszą wyłącznie autorzy.

Copyright:

© — 2026 — Akademia WSB. Niniejsze opracowanie jest udostępniane na licencji CC BY-NC-SA 4.0.
Wszelkie prawa zastrzeżone. Unii Europejskiej udzielono licencji warunkowej.

Wydawca i dystrybutor: Akademia WSB, ul. Cieplaka 1C, 41-300 Dąbrowa Górnicza, Poland

ISBN: 978-83-68935-00-4

Wykorzystanie narzędzi TIK w matematyce

Przewodnik metodyczny
dla nauczycieli szkół podstawowych

Partnerzy projektu:

H-Edu
#prostor_pro_Tebe



Akademia WSB
WSB University

SPIS TREŚCI

Część teoretyczna	5
Kompetencje cyfrowe	5
Kompetencje cyfrowe uczniów i nauczycieli	5
Rodzaje kompetencji cyfrowych w odniesieniu do uczniów	5
Zasady metody Hejný'ego	6
Teoria modelu generycznego (dalej TMG), czyli „Jak powstaje wiedza w głowie ucznia?”	8
TMG w kontekście TIK	9
Proces i koncept	11
Narzędzia TIK i ich rola w matematyce	12
 Część praktyczna: Elektroniczne wsparcie podczas nauczania metodą Hejný'ego	 13
Praca z plikami	13
Pliki graficzne	13
Pliki Excela	13
Pliki GeoGebra	13
Podręcznik dla klasy 4	14
Podręcznik dla klasy 5	17
Inne narzędzia TIK do zadań z podręczników	28

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Kompetencje cyfrowe

Czym są kompetencje cyfrowe? Podstawowa odpowiedź na to pytanie jest prosta: jest to umiejętność poruszania się w środowisku cyfrowym, korzystania z technologii, a jednocześnie zachowywanie wobec niej dystansu i rozumienie wpływu, jaki środowisko cyfrowe ma na otoczenie. Kompetencje cyfrowe - to bezpieczne, świadome, krytyczne i twórcze korzystanie z technologii ICT w pracy, nauce i czasie wolnym. Te kompetencje należą obecnie do fundamentalnych umiejętności.

Kompetencje cyfrowe uczniów i nauczycieli

W rozwoju kompetencji cyfrowych uczniów istotne znaczenie ma poziom kompetencji cyfrowych nauczyciela. Nauczyciel może swoim przykładem prowadzić uczniów do świadomego i efektywnego korzystania z technologii ICT, wskazywać im różne cele i kierunki, ale może też ich zniechęcić do tej technologii, jeśli zbyt często używa jednego narzędzia. Typowym przykładem są skargi uczniów na nadmierne wykorzystywanie prezentacji: zarówno jako pomocy dydaktycznej, jak i zadania do wykonania przez uczniów. W tym poradniku staramy się przedstawić jak najszerszą paletę sposobów korzystania z technologii ICT w celu ułatwienia pracy uczniom i nauczycielom na lekcjach matematyki oraz zwiększenia ich efektywności.

Rozwój kompetencji uczniowskich

1. Uczniowie obserwują wykorzystywanie technologii przez nauczyciela w celu podniesienia jakości nauczania.
2. Nauczyciel w danym zadaniu proponuje rozwiązanie z użyciem narzędzia ICT, a uczniowie samodzielnie je testują i zapoznają się z jego obsługą.
3. Uczniowie podczas rozwiązywania zadań samodzielnie decydują, jakiego narzędzia ICT użyć i dlaczego.

Ostatni poziom powinien być najwyższym celem nauczyciela w rozwijaniu kompetencji cyfrowych ucznia. Nie można jednak pominąć wcześniejszych etapów, do których proponujemy zestaw aktywności i materiałów.

Więcej na temat rozwoju cyfrowych kompetencji nauczycieli we wszystkich dziedzinach wiedzy znajdziesz w publikacji DigCompEdu, w której można znaleźć szczegółowe informacje:

<https://www.npi.cz/images/publikace/DigCompEdu.pdf>

Rodzaje kompetencji cyfrowych w odniesieniu do uczniów

Wykorzystanie technologii i angażowanie uczniów

Uczeń obsługuje powszechnie używane urządzenia cyfrowe, aplikacje i usługi; wykorzystuje je podczas nauki, a także w życiu szkolnym i prywatnym; samodzielnie decyduje, jakie technologie i do jakich działań lub problemów zastosować.

Aby uczniowie mogli się to opanować, ważne jest podsuwanie im zadań, w których mogą efektywnie wykorzystać potencjał technologii. Typowe są tu zadania, w których mogą sobie na przykład ułatwić skomplikowane obliczenia (jeśli same obliczenia nie są celem). Takich zadań jest wiele — przykładem może być zadanie 21/1 z podręcznika C, w którym uczniowie najpierw zbierają dane potrzebne do obliczenia stopnia zalesienia poszczególnych państw. Jeśli następnie utworzą poprawny wzór do tego wyliczenia, to uzyskają wszystkie pozostałe wyniki kopiując po prostu swoją formułę.

Informacja i komunikacja

Uczeń zdobywa, wyszukuje, krytycznie ocenia, zarządza i udostępnia dane, informacje i treści cyfrowe, dobierając odpowiednio metody, sposoby i narzędzia dostosowane do konkretnej sytuacji i celu.

Do zobrazowania tego procesu można wykorzystać to samo zadanie, co w poprzednim akapicie (podręcznik C, 21/1). Uczniowie wyszukują dane z różnych źródeł, porównują je, a ze względu na konieczność przeliczania rzędów wielkości muszą również krytycznie je ocenić. Z arkuszem kalkulacyjnym pracują tutaj jako z odpowiednim narzędziem zarówno do ewidencji danych, jak i do ich analizy.

Tworzenie treści cyfrowych i autoekspresja

Uczeń tworzy i edytuje treści cyfrowe, łączy różne formaty, wyraża swoją tożsamość za pomocą narzędzi cyfrowych.

Taką kompetencję możemy rozwijać na przykład poprzez aktywność z podręcznika B (rozdział: Oś symetrii). W tym zadaniu uczniowie najpierw wykonują własne zdjęcie, które następnie edytują w jednym z programów graficznych i analizują symetrię swojej twarzy. Mogą do tego wykorzystać różne programy oraz formaty plików.

Efektywność i innowacje

Uczeń wykorzystuje technologie cyfrowe w celu ułatwienia sobie pracy, automatyzacji rutynowych czynności, usprawnienia i uproszczenia swoich działań oraz podniesienia jakości wyników swojej pracy.

Uczniowie efektywnie korzystają z technologii ICT na przykład podczas tworzenia formuł w zagadnieniu z zakresu edukacji finansowej. Odpowiada temu zadanie 39/6 z podręcznika D, w którym uczniowie mają obliczyć wartość kapitału po 5 latach. Jeśli z uczniami kontynuujemy pracę nad podobnymi zadaniami, szybko pojawi się potrzeba uproszczenia obliczeń. Może w tym pomóc arkusz kalkulacyjny i kopiowanie odpowiednio przygotowanych formuł.

Znaczenie i rozwój ICT

Uczeń rozumie znaczenie technologii cyfrowych dla społeczeństwa, poznaje nowe technologie, krytycznie ocenia płynące z nich korzyści i reflektuje nad ryzykiem ich stosowania.

Przykładem takiego narzędzia jest aplikacja Photomath, którą opisujemy w zestawieniu narzędzi ICT przy końcu materiału. Innym przykładem jest używanie kodów QR, które stały się integralną częścią codziennego życia. Tematowi pracy z kodami QR również poświęcamy więcej uwagi w części dotyczącej narzędzi ICT.

Zasady metody Hejny'ego

Ważne jest, aby technologie cyfrowe były włączane do nauczania zgodnie z zasadami i teoriami, na których opiera się metoda Hejny'ego. Dlatego teraz je sobie przypomnijmy.

- **BUDOWANIE SCHEMATÓW**

Dziecko wie również to, czegośmy go nie uczyli. Czy wiesz, ile okien jest w twoim mieszkaniu? Pewnie nie wiesz tego z pamięci..., ale gdy się chwilę zastanowisz, to potrafisz odpowiedzieć. I to poprawnie. Bo masz w głowie schemat swojego mieszkania. Dzieci również mają w głowie własne schematy. Metoda Hejny'ego je wzmacnia, łączy ze sobą i na ich podstawie pomaga wyciągać konkretne wnioski. Dlatego dzieci szybko sobie uświadamiają, że jedna druga to także liczba 0,5, a ułamki — zwykle trudne — nie stanowią dla nich problemu.

- **PRACA W RÓŻNYCH ŚRODOWISKACH**

Uczymy się poprzez wielokrotne powracanie do znanych sytuacji. Gdy uczniowie dobrze znają dane środowisko i czują się w nim pewnie, nie rozpraszają ich nowe elementy. Mogą skupić się wyłącznie na danym zadaniu,

a nieznany kontekst nie przeszkadza im w pracy. Każde z około 25 bliskich nam środowisk oddziałują na niego inaczej (Rodzina, Autobus, „Krokowanie” itd.). System środowisk został zaprojektowany tak, by odpowiadać na różne style uczenia się i funkcjonowania dziecięcego umysłu, który dzięki temu jest motywowany do dalszych eksperymentów.

- **PRZENIKANIE SIĘ TEMATÓW**

Praw matematyki nie uczymy w oderwaniu od siebie. Informacje nie są przekazywane dziecku w izolacji – zawsze są osadzone w znanym schemacie, który uczeń może w każdej chwili przywołać. Nie oddzielamy od siebie pojęć i zjawisk matematycznych, lecz uczymy ich poprzez różne strategie rozwiązywania. Dziecko samo wybiera tę, która bardziej mu odpowiada i wydaje się naturalna. Dlatego na lekcji nie usłyszymy klasycznego: „Ojej, proszę pani, to było dwa lata temu, już tego nie pamiętamy...”

- **ROZWÓJ OSOBOWOŚCI**

Wspieramy samodzielne myślenie dzieci. Jedną z głównych motywacji profesora Hejný’ego przy tworzeniu nowej metody było to, aby dzieci nie dawały się w życiu manipulować. Dlatego nauczyciel nie przekazuje gotowej wiedzy, lecz uczy dzieci przede wszystkim argumentowania, dyskusji i oceny sytuacji. Dzieci same potrafią rozpoznać, co jest dla nich właściwe, szanują innych i potrafią podejmować decyzje. Z odwagą ponoszą konsekwencje własnych działań. Oprócz matematyki odkrywają w sposób naturalny podstawowe zasady zachowań społecznych i dojrzewają pod względem moralnym.

- **PRAWDZIWA MOTYWACJA**

Gdy „Nie wiem” zmienia się w „Chcę wiedzieć”. Wszystkie zadania matematyczne w metodzie Hejný’ego są tak skonstruowane, by ich rozwiązywanie sprawiało dzieciom autentyczną radość. Prawdziwa motywacja – to ta, która pochodzi z wnętrza, a nie z presji zewnętrznej. Dzieci dochodzą do rozwiązań dzięki własnemu wysiłkowi. Nie odbieramy im radości z osobistego sukcesu. Dzięki atmosferze w klasie wszyscy sobie nawzajem kibicują – także tym, którzy później odnajdą rozwiązanie.

- **PRAWDZIWE DOŚWIADCZENIA**

Opieramy się na osobistych przeżyciach dziecka. Wykorzystujemy jego własne doświadczenie zdobywane od pierwszego dnia życia – w domu, z rodzicami, przy odkrywaniu świata na podwórku lub w piaskownicy z innymi dziećmi. Budujemy na naturalnym, konkretnym doświadczeniu, z którego dziecko potrafi wyprowadzić ogólne wnioski. Dzieci na przykład „szyją ubrania” dla sześcianu i dzięki temu samorzutnie uczą się, ile ma ścian, wierzchołków i jak obliczyć jego pole powierzchni.

- **RADOŚĆ Z MATEMATYKI**

Radość wspiera znacząco dalszą naukę. Doświadczenie pokazuje jasno: najskuteczniejsza motywacja pochodzi z poczucia sukcesu dziecka, z jego szczerzej radości, że samodzielnie rozwiązało stosunkowo trudne zadanie. To radość z własnych postępów, z uznania ze strony kolegów i nauczyciela. Dzieci nie znają „lęku przed matematyką”, o którym w naszych szkołach krążą legendy. Wręcz przeciwnie: gdy widzą wzór, nie reagują niechęcią, ale entuzjazmem – „Znam to, poradzę sobie!”

- **WŁASNE ODKRYCIA**

Mają większą wartość niż te przejęte od innych. Gdy uczeń pierwszej klasy ma ułożyć z patyczków kwadrat, bierze jeden patyczek, potem drugi, trzeci... Nadal to nie wystarcza, więc sięga po czwarty patyczek i układa kwadrat. Następnie postanawia ułożyć większy kwadrat. Bierze kolejne patyczki i układa większy kwadrat. Zaczyna przeczuwać, że jeśli będzie chciał ułożyć jeszcze większy kwadrat, to za każdym razem będzie potrzebował czterech kolejnych patyczków. Jest na drodze do odkrycia wzoru na obwód kwadratu.

- **ROLA NAUCZYCIELA**

W powszechnym przekonaniu nauczyciel – to ktoś, kto wie, potrafi i wyjaśni. Tak więc nauczyciel matematyki zna matematykę, dlatego może o niej opowiadać. W wielu przypadkach tak właśnie się dzieje. Dziecko słucha wywodów nauczyciela, robi notatki w zeszytach, słucha instrukcji dotyczącej rozwiązania nowego problemu

i uczy się korzystać z nowo poznanych sposobów działania. W naszym rozumieniu edukacji rola nauczyciela i dziecka jest zupełnie inna. Nauczyciel jest przewodnikiem, formułującym problemy lub moderatorem dyskusji. Stara się pracować na błędach dostrzeganych w aktywnościach uczniów.

- **PRACA NA BŁĘDACH**

Zapobiegamy powstawaniu niepotrzebnych lęków u dzieci. Dziecko, któremu nie pozwoli się na upadki, nigdy nie nauczy się chodzić. Analiza błędu prowadzi do głębszego doświadczenia, dzięki któremu dzieci znacznie lepiej zapamiętują poznaną wiedzę. Błędy wykorzystujemy jako środek do nauki. Zachęcamy dzieci, aby same odnajdywały swoje błędy, i uczymy je wyjaśniać, dlaczego te błędy się pojawiły. Wzajemne zaufanie między dzieckiem a nauczycielem wspiera radość uczniów z wykonanej pracy.

- **ADEKWATNE WYZWANIA**

Mają być one dostosowane do każdego dziecka i jego poziomu. Nasze podręczniki zawierają zadania o różnym stopniu trudności. Dzięki temu, że słabsi uczniowie zawsze potrafią rozwiązać jakieś zadania, zapobiegamy uczuciu lęku i przerażenia przed kolejnymi lekcjami matematyki. Najlepszym uczniom natomiast stale stawiamy nowe wyzwania, aby się nie nudzili. Nauczyciel nie przeciąża ich zadaniami, lecz zadaje takie, które są dla nich motywem do działania. Rozdziela zadania w klasie w zależności od potrzeb poszczególnych uczniów.

- **PROMOWANIE WSPÓŁPRACY**

Wiedza rodzi się z dyskusji. Dzieci nie czekają, aż wynik pojawi się na tablicy. Pracują w grupach, parami lub indywidualnie. Każdy uczeń jest w stanie powiedzieć, jak doszedł do wyniku, i umie to wyjaśnić innym. Wynik powstaje w drodze współpracy. Nauczyciel nie jest tutaj ostatecznym autorytetem, który powie, gdzie jest prawda – i przewróci kartkę w podręczniku. Uczniowie konstruują własną pełnowartościową wiedzę, nad którą nieustannie się zastanawiają.

Teoria modelu generycznego (dalej TMG), czyli „Jak powstaje wiedza w głowie ucznia?”

Znany matematyk, i przede wszystkim dydaktyk, prof. Milan Hejny dzieli proces wznoszenia gmachu wiedzy (TMG) na kilka poziomów oraz przejść między nimi:

- 1. Poziom motywowania**

Motywacja do poznawania wynika z wewnętrznego konfliktu ucznia między „nie wiem” a „chcę wiedzieć”. Jeśli natomiast będziemy ucznia zmuszać do poznawania rzeczywistości, to nie możemy mówić wówczas o motywowaniu, lecz o stymulowaniu.

- 2. Poziom modeli izolowanych**

Chodzi o stopniowe zdobywanie doświadczeń z konkretnymi przypadkami zdobywanej wiedzy – im więcej takich modeli uczeń pozna, tym głębsze będzie jego zrozumienie. Ważną rolę odgrywają tutaj modele pozorne (nie są modelami, choć mogą tak wyglądać), zaskakujące (modele, których się nie spodziewaliśmy, lub takie, które udają, że nie są modelami), a także tzw. nie-modele (dla uzupełnienia, by uczeń widział również to, co nie należy do zbioru modeli).

- 3. Uogólnienie**

Na tym poziomie poszczególne modele zapisane w świadomości ucznia zaczynają się ze sobą łączyć, grupować i strukturyzować, co prowadzi do głębszego wglądu w poznanie oraz do powstania tzw. modelu generycznego (ogólnego).

- 4. Poziom modeli generycznych**

Są to modele, które stanowią prototypy wszystkich lub określonych grup modeli izolowanych.

- 5. Uwznioślenie abstrakcyjne**

Prowadzi do poznania abstrakcyjnego. Zbiór modeli izolowanych i generycznych zostaje przekształcony w świadomości ucznia, a nowy wgląd ma bardziej abstrakcyjny charakter.

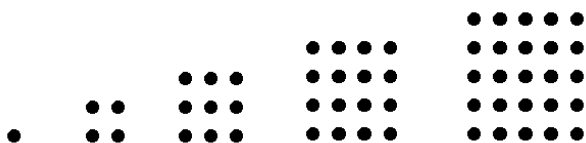
6. Poziom krystalizacji

Nowe poznanie zostaje powiązane z wcześniej zdobytą wiedzą – najpierw na poziomie modeli, a następnie na poziomie poznania abstrakcyjnego. Jest to proces długotrwały.

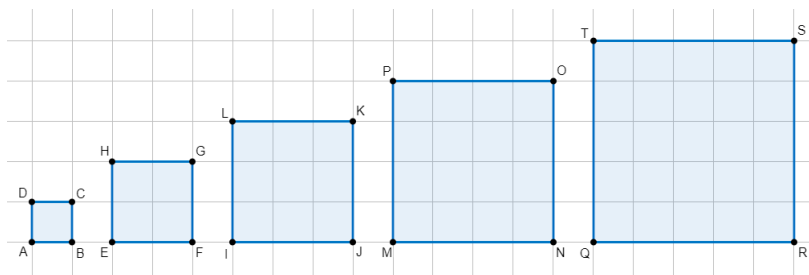
Konkretny przykład:

Jeśli chcemy nauczyć uczniów edukacji wczesnoszkolnej zrozumienia, czym jest pole kwadratu, to zazwyczaj nie zrobimy tego w czasie jednej lekcji. Pomijając kwestię motywowania uczniów (które samo w sobie jest obszernym zagadnieniem), pierwszym etapem TMG będzie uzyskanie tzw. modeli izolowanych (konkretnych). Podczas odkrywania zależności dotyczących pola kwadratu przedstawiamy uczniom najpierw zadania typu:

Zadanie: Z ilu kamyków składają się poszczególne kwadraty na poniższym obrazku?



Zadanie: Z ilu kwadracików składają się poszczególne kwadraty na poniższym obrazku?



Na podstawie tych modeli izolowanych, oraz dzięki wzajemnej dyskusji, uczniowie odkrywają tzw. model generyczny (ogólny) pola kwadratu. Mówią na przykład: „Pole kwadratu obliczamy, mnożąc jego boki”. Przy dalszych doświadczeniach (zazwyczaj na etapie starszych klas), z użyciem zmiennych i wyrażeń algebraicznych, uczniowie potrafią sformułować to również na poziomie abstrakcyjnym: $S = a \cdot a$, gdzie a to długość boku kwadratu. W ten sposób w ich umyśle powstaje wiedza, która jest wsparta licznymi konkretnymi sytuacjami (modelami) i doświadczeniami towarzyszącymi procesowi odkrywania.

TMG w kontekście TIK

Teoria modelu generycznego w procesie poznawczym została opisana powyżej. Tutaj zastanawiamy się, jak wdrażać tę teorię za pomocą narzędzi TIK (technologii informacyjno-komunikacyjnych).

Teorię tę uprościmy do czterech kroków: motywowanie → modele izolowane → model ogólny (generyczny) → abstrakcja.

Motywowanie

Narzędzia TIK same w sobie często pełnią funkcję motywującą. Uczniowie są przyzwyczajeni do korzystania z technologii, a taka forma pracy może ich motywować np. do badania zjawisk matematycznych, zależności itp. Motywację tę mogą dodatkowo wzmocnić doświadczenia, w których uczniowie wyraźnie dostrzegają użyteczność danego oprogramowania. W ten sposób rodzi się potrzeba sięgania po to oprogramowanie również przy innych podobnych aktywnościach czy zadaniach.

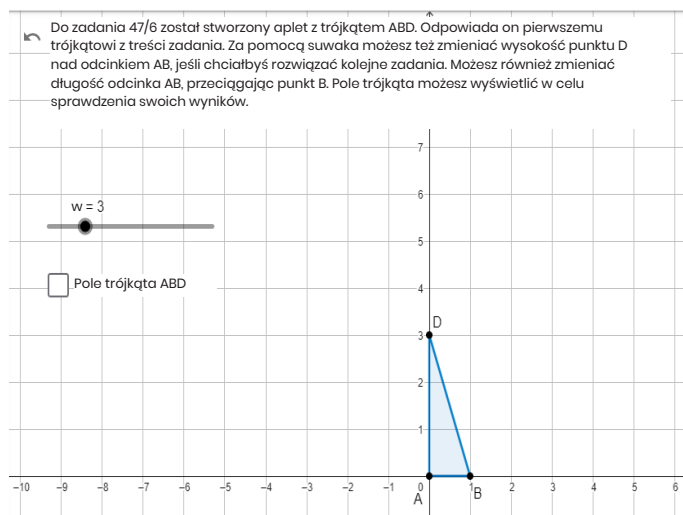
Na przykład: gdy uczniowie zyskają doświadczenie, że w arkuszu kalkulacyjnym można za pomocą prostego wzoru rozwiązywać zadania z matematyki finansowej, będą motywowani do użycia tego narzędzia również przy kolejnym spotkaniu z podobnym zadaniem.

Modele izolowane i wiedza ogólna (generyczna)

Generowanie dużej liczby przypadków izolowanych (doświadczeń, modeli) jest ogromną zaletą oprogramowania. W arkuszu kalkulacyjnym, na przykład w zadaniu z podręcznika dla klasy 5, nr 73/12 (zob. ilustracja), uczniowie mogą poprzez samą zmianę liczby w szarym polu uzyskać kolejny izolowany model, który wskazuje na wzór algebraiczny $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$. Gdy uczniowie będą mieli do dyspozycji wystarczającą liczbę takich modeli, mogą wówczas samodzielnie odkryć ogólną zależność (w tym przypadku wspomniany wzór).

Do zadań 71/2 (a i b) został opracowany wzór, który oblicza wyniki podanych zadań. Zadanie zostało przekształcone w zadanie z „kopertą”. Możesz zmieniać liczbę w kopercie (w szarym polu), aby uzyskać kolejne wyniki zadań i sprawdzić poprawność rozwiązania. Litera O w zapisie oznacza liczbę w kopercie. Dla liczby 5 wynikiem jest 24. Jest to również zapisane w tabeli po prawej stronie. Zmieniaj liczbę w kopercie i zapisuj kolejne wyniki w tabeli. Czy potrafisz szybko sam(a) określić wynik dla dowolnej liczby w kopercie?									
liczba w kopercie	wynik zadania $(O+1) \cdot (O-1)$			liczba w kopercie	5				
5	24			wynik	24				

W programie GeoGebra, w aplecie do zadania 47/6 z klasy 5 (zob. rysunek), uczniowie mogą przeciągać punkt D wzdłuż prostej równoległej do boku AB (na danej wysokości), dzięki czemu szybko otrzymują nowe trójkąty o takiej samej powierzchni jak trójkąt początkowy. Zapoznają się w ten sposób praktycznie z tzw. zasadą Cavalieriego, a także z faktem, że pole trójkąta zależy od długości jego boku i odpowiadającej mu wysokości.



Abstrakcja

Abstrakcja jest ostatnim etapem procesu poznawczego. Chodzi właściwie o ogólne poznanie opisane językiem matematyki. Z tej perspektywy wykorzystujemy przede wszystkim edytor arkuszy kalkulacyjnych. Na przykład w zadaniu 23/6 z klasy 5 uczniowie mają stworzyć wzór na obliczenie pola prostokąta. Jeśli im się to uda, to z punktu widzenia procesu poznawczego znajdują się w jego końcowej fazie: stworzony wzór $\text{pole} = \text{komórka} \cdot \text{komórka}$ jest właściwie wzorem $S = a \cdot b$.

Zapisz w kolumnach B i C wymiary prostokąta. W kolumnie D spróbuj ułożyć prosty wzór, który obliczy pole prostokąta o podanych wymiarach. Jeśli nie wiesz jak to zrobić, pomoże Ci nauczyciel/nauczycielka.				
wymiar prostokąta a	wymiar prostokąta b	pole prostokąta		

Proces i koncept

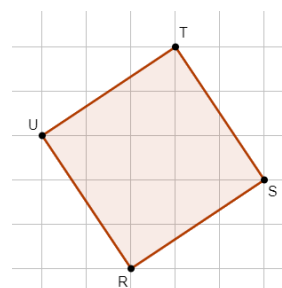
Ważnymi pojęciami w procesie poznawczym ucznia są również „proces” i „koncept”. Mówiąc wprost, proces to coś dynamicznego, a koncept to coś statycznego. W poniższych akapitach postaramy się wyjaśnić, jak istotne są te pojęcia w procesie poznawczym ucznia. Zilustrujemy to na konkretnych przykładach i zastanowimy się także nad wykorzystaniem narzędzi TIK.

Proces a koncept: rysunek 1

W podręczniku A, w zadaniu 73/3 b), znajduje się polecenie: Dokończ zapis strzałkowy tak, aby RSTU był kwadratem ($R \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow S \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow T$). Uczniowie mają skonstruować gotowy kwadrat (koncept) i szukają sposobu, jak do niego dojść: najpierw wyznaczają punkt R, na siatce wykonują trzy kroki w prawo i dwa kroki w górę, otrzymują punkt S, z niego idą trzy kroki w górę i dwa w lewo i otrzymują punkt T. Następnie sprawdzają, jak z punktu T dojść do ostatniego wierzchołka kwadratu U. W ten sposób opisaliśmy PROCES, w którym uczniowie konstruują kwadrat (KONCEPT). W tym przypadku uczniowie przechodzą od procesu do konceptu.

Gdybyśmy odwrócili to zadanie: „Dany jest kwadrat RSTU, znajdź zapis strzałkowy do jego konstrukcji”, to idziemy w odwrotnym kierunku – od konceptu do procesu. Uczniowie do gotowego rysunku szukają sposobu, jak ten kwadrat skonstruować.

Wzajemne powiązanie obu podejść jest niezwykle istotne dla właściwego zrozumienia pojęć matematycznych. Dlatego w praktyce uwzględniamy zadania obu typów (kierunków).



Proces a koncept: rysunek 2

W podręczniku A, zadanie 23/4, uczniowie zapisują liczbę patyczków w zależności od liczby „podwójnych okienek”. Za pomocą procesu najpierw uzupełniają w tabeli poszukiwane liczby patyczków. Na dwa „podwójne okienka” potrzebują 12 patyczków, na trzy – 17, na cztery – 22 i tak dalej.

podwójne okienka	2	3	4	5	6	7	16	50
patyczki	12	17	22	27	32	37	82	252

Ten proces pokazuje uczniom, że z każdym nowym „podwójnym okienkiem” przybywa 5 patyczków. Jednak dzięki temu uczniowie są w stanie rozwiązać jedynie zadania z niewielką liczbą „podwójnych okienek”. Aby szybko znaleźć liczbę patyczków na przykład dla 50 „podwójnych okienek”, muszą odkryć związek konceptualny (rozwiązanie za pomocą procesu byłoby bardzo czasochłonne). Związek ten znajdują dzięki tabeli albo jakiejś wizualizacji lub uzasadnieniu, jak zachowują się patyczki. Pomocne bywa również manipulowanie patyczkami lub rysowanie sytuacji. W tym przypadku związek konceptualny brzmi: liczba patyczków = liczba „podwójnych okienek” $\cdot$ 5 + 2. Bez procesu (dynamicznego wglądu w sytuację) uczniowie mieliby trudności z odkryciem tego konceptu.

Wprowadzenie czegoś w ruch (umieszczenie w procesie) jest ogromną zaletą geometrycznych narzędzi TIK. Możemy tu wymienić na przykład program GeoGebra.

Na przykład w podręczniku, w rozdziale „Kształty zaokrąglone” (zadanie 69/13), uczniowie odkrywają wzór na objętość kuli. To bardzo trudne zagadnienie. Za pomocą dynamicznego apletu, wykorzystując proces (zmiana wartości za pomocą suwaka), stwierdzają, że dla wszystkich wartości suwaka zachodzi zależność (koncept): objętość walca = objętość półkuli + objętość stożka. Trzeba dodać, że wszystkie bryły mają te same podstawowe parametry (promień podstawy i wysokość). Na podstawie tej zależności można już wyprowadzić objętość całej kuli.

Narzędzia TIK i ich rola w matematyce

Narzędzia TIK możemy dzielić na różne sposoby. My proponujemy podział jednoznacznie praktyczny, który dotyczy bezpośrednio lekcji matematyki.

Możliwości wykorzystania narzędzi TIK:

1. Jako materiał przygotowawczy do zajęć
2. Bezpośrednie wykorzystanie podczas lekcji
3. Zbieranie lub archiwizacja wyników z lekcji

Funkcje narzędzi TIK w matematyce:

- | | |
|---|--|
| 1. Konstruktywistyczne przyswajanie umiejętności matematycznych | 11. Upraszczenie problemu |
| 2. Zastąpienie rutynowych działań | 12. Wizualizacja problemu |
| 3. Serwis edukacyjny | 13. Praca z danymi |
| 4. Organizacja zajęć | 14. Szybkie tworzenie podobnych zadań – zarówno w celu stopniowania trudności, jak i ćwiczenia pojęć |
| 5. Narzędzia do testowania i informacji zwrotnej | 15. Szybkie generowanie wyników – przyspieszenie pracy |
| 6. Czynniki motywacyjny | 16. Przypomnienie centralnej idei potrzebnej do rozwiązania zadania |
| 7. Gromadzenie izolowanych modeli | 17. Narzędzie do przeprowadzania eksperymentów |
| 8. Pomoc w odnalezieniu modelu ogólnego (generycznego) | 18. Możliwość porównania własnych rozwiązań z rozwiązaniami przy użyciu narzędzia TIK |
| 9. Weryfikacja hipotez | 19. Optymalizacja zadania |
| 10. Pomoc w odkrywaniu trudnych pojęć matematycznych | 20. Przechodzenie od procesu do konceptu i odwrotnie |

CZĘŚĆ PRAKTYCZNA: Elektroniczne wsparcie podczas nauczania metodą Hejný'ego

Praca z plikami

Podczas pracy z materiałami z podręcznika można natknąć się na trzy podstawowe typy plików – obrazy (.jpg), aplety GeoGebry (.ggb) oraz pliki Excela (.xls, .xlsx).

Celem tego rozdziału jest skrótowe przedstawienie, jak pracować z tymi plikami.

Pliki graficzne

Praca z plikami graficznymi jest prosta. Wystarczy otworzyć dany plik w jednej z aplikacji obsługujących obrazy (domyślnie ustawiona aplikacja – np. Paint, IrfanView, Zdjęcia, itp.). Po otwarciu pracuje się z uczniami bezpośrednio w tym programie.

Pliki Excela

Pliki arkusza kalkulacyjnego najlepiej otwierać bezpośrednio w aplikacji Excel. Jeśli nie masz jej do dyspozycji, możesz skorzystać z innych aplikacji, które potrafią otworzyć ten typ pliku – bardzo często używa się do tego Arkuszy Google. W wyjątkowych przypadkach może się zdarzyć, że niektóre narzędzia lub funkcje będą działały nieco inaczej.

Pliki GeoGebra

Programu GeoGebra można używać w wersji online lub desktopowej. Online GeoGebra oferuje wersję GeoGebra lub GeoGebra Classic. Poszczególne wersje różnią się nieco od siebie. Wszystkie nasze aplety zostały opracowane do wersji GeoGebra Classic, w której działają najlepiej.

Zalecamy więc otwieranie ich przez te strony: <https://www.geogebra.org/classic>.

Dla obu wersji istnieje podział na geometrię 2D i geometrię 3D. Geometrię przestrzenną otwieramy dodając do adresu 3d: <https://www.geogebra.org/classic/3d>.

Podręcznik dla klasy 4

Rozdział: Zadania powtórzeniowe

strona 6, zadanie 5 (aplet ggb)

Do zadania 6/5 przygotowano jedną z siatek graniastosłupa. Możesz ją składać i rozkładać za pomocą suwaka. Utworzona siatka nieznacznie różni się od tej z podręcznika. To świetna okazja do rozmowy z uczniami. Uczniowie mogą obracać graniastosłup za pomocą wskaźnika, aby obserwować go - i jego siatkę - z różnych perspektyw. Następnie mogą rozwiązać zadanie z podręcznika. Ważne jest, aby uczniowie mieli możliwość działań manualnych (użycie klocków konstrukcyjnych, kostek, wycinanie i składanie papieru itp.), dlatego narzędzia ICT powinny być wprowadzane dopiero po zdobyciu większego doświadczenia w takich działaniach.

Rozdział: Figury płaskie I

strona 12, zadanie 2

Manipulowanie papierem lub innymi pomocami ma oczywiście pierwszeństwo. Jeśli brakuje tych pomocy lub nie ma czasu na ich wykonanie, istnieje alternatywa pracy z tangramem w środowisku online: <https://polypad.amplify.com/p/#tangram>. W aplikacji Polypad uczniowie mogą obracać poszczególne elementy, składać je razem lub w razie potrzeby zmieniać ich kolor.

Rozdział: Dzielenie przez liczbę jednocyfrową, Karta pracy

strona 23, zadanie 8 (Excel)

Celem tej aktywności jest wzbogacenie doświadczeń uczniów w tzw. liczeniu z komfortem. Aby przyspieszyć częste obliczenia, warto, aby uczniowie potrafili pomóc sobie poprzez głębszy wgląd w to zadanie. Na przykład w zadaniach typu $12 \cdot 2 \cdot 5$ najpierw liczą $12 \cdot 2 = 24$, a następnie $24 \cdot 5 = 120$. Gdyby jednak mieli wgląd w sytuację (podejście konceptualne), powiedzieliby: „ $2 \cdot 5$, to - to samo co $\cdot 10$, dlatego jest to $12 \cdot 10 = 120$ ”. W ten sposób oszczędzają czas potrzebny na obliczenia, a czasem nawet zmniejszają ryzyko błędu rachunkowego.

W arkuszu kalkulacyjnym stworzono wzór, który pozwala obliczyć powyższe zadanie. Uczniowie mogą następnie zmieniać pola wejściowe (zamiast liczby 12) i zdobywać dalsze doświadczenia, widząc, że $\cdot 2 \cdot 5$ to - to samo co $\cdot 10$. Ważne jest, aby każdą sytuację odnotować w przygotowanej tabeli, aby uczniowie wizualizowali te zależności dla większej liczby przypadków.

Zadania można następnie zmieniać, modyfikując liczby; możesz również skorzystać z przygotowanej karty pracy.

Komentarz do karty pracy:

Uczniowie dzięki karcie pracy zdobywają doświadczenie w liczeniu z komfortem – patrz wyżej. Kolejnym celem jest praca z edytorem arkuszy kalkulacyjnych i tworzenie prostych wzorów z operacjami mnożenia i dzielenia. Najpierw rozwiązują zadanie z podręcznika (zeszytu ćwiczeń), a następnie mają „z badać” utworzony wzór w Excelu i wykorzystać go do tworzenia kolejnych zadań. W ten sposób przeplatają się dwa cele: matematyczny i informatyczny.

W ostatniej aktywności uczniowie są proszeni o utworzenie tabeli z dzieleniem. Należy wspólnie z uczniami rozwiązać problem znalezienia symbolu dzielenia. Ktoś może na przykład wpaść na pomysł skopiowania symbolu z podanej karty pracy lub znaleźć go w Internecie. Mimo to warto znaleźć ten symbol również na klawiaturze (klawiatura numeryczna, Alt + 0247).

Rozdział: Praca z danymi I

strona 33, zadanie 8 (Excel)

Tutaj nie oferujemy gotowego pliku Excel, lecz pozwalamy go utworzyć uczniom. Nie jest to wcale skomplikowane. Wystarczy otworzyć dowolny edytor arkuszy kalkulacyjnych (Excel), gdzie uczniowie zapiszą zebrane dane. Na przykład, w jednej kolumnie zapiszą listę wszystkich marek telefonów, a w drugiej kolumnie - ich liczbę. Następnie łatwo jest utworzyć wykres (Wstawianie → Polecane wykresy), a potem wybrać wykres kolumnowy. Wykres można dostosowywać do potrzeb. Częstym błędem jest to, że podczas wstawiania wykresu uczniowie nie mają zaznaczonych odpowiednich danych.

Rozdział: Schody poniżej zera, Karta pracy

strona 37, zadanie 8 (Excel)

Celem zadania jest podprowadzenie uczniów, przez rozwiązywanie konkretnych sytuacji, pod uogólnienie zadania. Excel zostanie wykorzystany do generowania zadań jako szybkie narzędzie do weryfikacji, a także do rejestrowania wyników. Te z kolei dobrze wskazują na poszukiwaną zależność.

Komentarz do karty pracy:

Uczniowie najpierw samodzielnie rozwiązują zadanie 37/8. Mają obliczyć sumę pięciu liczb wycinka. Pracują z wydrukowanymi tabelami, a do sprawdzenia mogą wykorzystać tabelę z pliku Excel. Tam zaznaczając pięć liczb (opis znajduje się w pliku Excel), obliczą ich sumę. Te same zadania kontynuują następnie w Excelu. W kolejnym zadaniu zmieniamy treść zadania: „Uczniowie znają sumę pięciu liczb i mają znaleźć środkową liczbę”. Ostatnie dwa zadania zmierzają do uogólnienia problemu. Uczniowie mają odkryć zależność: suma pięciu liczb = 5 * środkowa liczba wycinka. Uczniowie mogą następnie szukać innych wycinków (płytek), dla których zależność ta obowiązuje. Są one wymienione w podręczniku nauczyciela, ale zawsze chodzi o wycinek pięciu liczb, który jest symetryczny względem środka.

Rozdział: Geometria I

strona 41, zadanie 5 (Powerpoint)

Do ćwiczenia układu współrzędnych można wykorzystać z uczniami stworzone gry ze stopniowym odkrywaniem obrazków. Zadaniem uczniów jest odgadnąć, jaki obrazek jest ukryty. Najlepiej, jeśli uczniowie zmieniają się w grupach i za pomocą współrzędnych (np. A3) stopniowo odkrywają obrazki. Możliwe jest również stworzenie własnego obrazka. Należy jednak sformatować go do odpowiednich wymiarów, tak aby siatka zakrywająca ze slajdu 1 dokładnie go pokrywała.

Aby to odkrywanie było skuteczne, prezentacja musi być w trybie pokazu slajdów. Oznacza to, że prezentacja musi zostać uruchomiona: na przykład za pomocą „Prezentacja” i uruchomić „Od bieżącego slajdu”. Ponadto należy uważać, gdzie klikamy myszą. Musimy klikać na małe kwadraty, które zakrywają obrazek. Gdy klikniemy poza duży kwadrat, prezentacja przejdzie do nowego slajdu.

Rozdział: Bryły

Strona 46, zadanie 4 (aplety GeoGebra)

Do zadania 46/4 przygotowano 4 siatki dla każdej z dwóch sześciannów. W przypadku pierwszego sześciannu uczniowie mają zaznaczyć na siatce odcinki tym samym kolorem, które po złożeniu sześciannu utworzą krawędzie równoległe. W przypadku drugiego sześciannu zaznaczają krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka. W apletach oznaczonych literą a) uczniowie pracują z pierwszym sześciannem, a w apletach b) – z drugim.

Uczniowie mogą składać i rozkładać siatki/sześcian, dzięki czemu mogą sobie wizualizować, które elementy do siebie pasują. Oczywiście mogą również obracać sześcian, uzyskując w ten sposób różne widoki bryły. Jeśli niektórzy uczniowie nie potrzebują pomocy w postaci apletu, świadczy to o ich bardzo dobrej wyobraźni przestrzennej. Ta może być jednak różna w zależności od typu siatki sześcianu.

strona 47, zadanie 5 (aplety GeoGebra)

Podobnie jak w zadaniu 46/4, także tutaj również przygotowano aplety, które pozwalają uczniom zwizualizować wszystkie sytuacje/zadania z polecenia. Do każdego z podzadań a)–d) dostępnych jest 6 siatek, co daje łącznie 24 różne zadania.

W sześcianie z zadania a) tym samym kolorem oznaczone są wierzchołki leżące na przekątnych ścian. W zadaniu b) tym samym kolorem oznaczone są wierzchołki jednej krawędzi (położone pionowo nad sobą). W zadaniu c) takim samym kolorem zaznaczone są wierzchołki przekątnej bryły (przekątna przestrzenna), natomiast w zadaniu d) każdy wierzchołek ma inny kolor.

Zadaniem uczniów jest zawsze zaznaczyć odpowiednimi kolorami punkty na siatce sześcianu. Najpierw testują oni swoją wyobraźnię przestrzenną i próbują rozwiązać zadania bez pomocy narzędzi. Następnie mogą użyć apletu do weryfikacji lub – w razie potrzeby – jako pomocy przy przechodzeniu z 2D do 3D i odwrotnie.

Rozdział: Wielkie liczby

strona 52, zadanie 11 (Excel)

W zadaniu z kamieniami uczniowie posługują się systemem dziesiętnym. Kamienie są umieszczane w poszczególnych rzędach (tysięcy, setek, dziesiątek lub jedności), tworząc w ten sposób liczby. Do zadania przygotowano arkusz Excel, w którym uczniowie zamiast fizycznych kamieni wpisują odpowiednie liczby do właściwych rzędów. Liczba pojawia się automatycznie dzięki zastosowanemu wzorowi, co pozwala uczniom kontrolować swoje liczby i rozwiązania. Niezależnie od tego, czy używamy pliku ICT, zmotywowani uczniowie mogą spróbować odkryć system, który umożliwi im znalezienie wszystkich liczb złożonych z czterech kamieni.

Rozdział: Geometria manipulacyjna

strona 54, zadanie 9 (aplet GeoGebra)

Do zadania przygotowano aplet z czworościanem (tetraedrem) i jego siatką. Uczniowie mogą składać i rozkładać siatkę za pomocą suwaka. Mogą również obracać bryłę, korzystając z narzędzia „Wskaźnik”. Najpierw mogą spróbować rozwiązać zadanie bez pomocy GeoGebry, a następnie wykorzystać aplikację do sprawdzenia swoich odpowiedzi lub jako wsparcie, jeśli nie są w stanie samodzielnie poradzić sobie z zadaniem.

Rozdział: Podzielność

strona 60, zadanie 2 (Excel)

W przygotowanym pliku uczniowie mogą wyszukiwać sumy ścieżek lub po prostu weryfikować swoje rozwiązania. Sposób postępowania jest opisany w arkuszu Excela. Uczniowie zapisują sumy w dołączonej tabeli i sprawdzają, czy są one podzielne przez sześć. Odkryją, że tak – ale tylko wtedy, gdy początkowa liczba jest parzysta. Jest to jedno z pojedynczych doświadczeń, które może później przyczynić się do zrozumienia reguły podzielności przez 6.

Uwaga: Suma trzech liczb tworzących ścieżkę musi być liczbą parzystą (liczba jest podzielna przez 6, jeśli jest podzielna jednocześnie przez 2 i przez 3). Warunek ten jest spełniony tylko wtedy, gdy liczba początkowa jest parzysta. Jeśli liczba początkowa jest nieparzysta, ścieżka zawsze składa się z dwóch liczb parzystych i jednej nieparzystej, więc jej suma jest nieparzysta.

W starszych klasach możemy w Excelu stosować funkcje (wzory), które pokażą, czy dana liczba jest podzielna przez inne liczby (np. przy użyciu funkcji MOD), jednak na tym etapie uznajemy to za przedwczesne – pożądane jest, aby uczniowie samodzielnie sprawdzali podzielność przez 6.

Rozdział: Praca z danymi II

strona 69, zadania 2 i 3 (Excel)

Do tych zadań nie oferujemy gotowego pliku. Uczniowie samodzielnie (najlepiej w grupie lub w parach) otwierają arkusz kalkulacyjny (Excel) i wpisują do niego poszczególne rzuty – najpierw w swojej grupie, a następnie również te z całej klasy. Muszą w jakiś sposób zarejestrować te dane i je przeanalizować. Jeśli uczniowie nie wiedzą, jak to zrobić, nauczyciel może im w tym pomóc. Na przykład może zaproponować, aby w kolumnie zostały zapisane liczby od 1 do 6, a następnie każda para wpisze do wspólnego pliku swoje wyniki (np. zapisując 1 dla każdego wystąpienia). W ten sposób wszystkie pary uzupełnią dane, a następnie uczniowie zliczą wystąpienia każdej liczby (używając prostego wzoru lub zaznaczając wszystkie wartości i odczytując informację w prawym dolnym rogu). Następnie zanotują sumy w formie wykresu (Wstawianie  Polecane wykresy). Każda para ma za zadanie stworzyć wykres ze swoich rzutów, a następnie uczniowie tworzą również wykres ze wszystkich rzutów klasy. W tym miejscu powinna już być widoczna idea prawdopodobieństwa – im więcej mamy rzutów, tym bardziej wyniki powinny zbliżać się do oczekiwanych rezultatów. W tym przypadku oznacza to, że wszystkie sześć liczb powinno mieć podobną liczbę wystąpień (każda liczba ma taką samą szansę na wypadnięcie).

Podobną aktywność z tworzeniem wykresów uczniowie mogli już wypróbować w rozdziale Praca z danymi I.

Podręcznik dla klasy 5

Rozdział: Zadania powtórkowe, karta pracy

strona 5, zadanie 4 (aplikacja ggb)

Aplet do zadania 5/4 wizualizuje jedną konkretną sytuację, w której pojawia się tzw. zasada Cavalieriego. Wynika z niej, że jeśli podstawa trójkąta się nie zmienia, a trzeci wierzchołek porusza się po prostej równoległej do podstawy, na tej samej wysokości, to pola wszystkich powstających trójkątów są równe (w zadaniu 1,5 kratki).

Uczniowie mogą użyć apletu do sprawdzenia swoich wyników. Może to być dla nich również impuls do dalszego badania wspomnianej zależności. GeoGebra - to odpowiednie narzędzie do takiego eksperymentowania, ponieważ pozwala łatwo tworzyć wiele konkretnych sytuacji pokazujących, że zależność ta działa zawsze. Na przykład uczniowie konstruują podstawę o długości 4 cm i wysokości 3 cm, a następnie przesuwają trzeci wierzchołek na tej samej wysokości. Wszystkie trójkąty mają wtedy pole 6 cm². Następnie mogą zmienić podstawę na długość 6 cm, zostawiając tę samą wysokość, i znów eksperymentować.

strona 7, zadanie 11 (aplikacja ggb)

W programach do geometrii proces konstrukcji może wyglądać inaczej niż na papierze. Program oferuje wiele narzędzi, dlatego na przykład aby uzyskać oś odcinka, uczniowie muszą aktywować odpowiednie narzędzie i kliknąć na dany odcinek. Dlatego jako nauczyciele musimy starannie przemyśleć, kiedy i jak używać tego typu oprogramowania. Wszystko zależy od celu, jaki chcemy osiągnąć z uczniami. Jeśli chcemy ćwiczyć precyzję rysowania, zręczność manualną, to używamy papieru. Jeśli natomiast chcemy skonstruować jakiś kształt i analizować z uczniami jego właściwości, nie musimy tracić czasu na rysowanie na papierze. Aplet służy do tego, aby uczniowie mogli wypróbować oba sposoby i omówić zalety i wady korzystania z programu.

Komentarz do karty pracy:

Celem tej karty pracy jest połączenie matematyki (konkretnie pola trójkąta) z pracą z oprogramowaniem. Uczniowie uczą się, że w niektórych przypadkach użycie programu jest korzystne – warto z nimi odkryć te zalety. W tym przypadku uczniowie będą przede wszystkim sprawdzać poprawność swoich rozwiązań.

Najpierw konstruują jeden trójkąt i za pomocą narzędzia „Pole” sprawdzają jego pole. Dzięki temu mają gotowe narzędzie do kontroli. Następnie, używając wskaźnika, mogą zmieniać położenie wierzchołków trójkąta i w ten sposób uzyskiwać kolejne zadania. W ten sam sposób uczniowie pracują przy zadaniach 2 i 3. Jeśli nie znają zasady rozwiązania, będą eksperymentować w aplecie i sprawdzać, czy uzyskali poprawny wynik.

strona 8, zadanie 15

W zadaniu 8/15 jedynie wspominamy o jego znaczeniu dla myślenia informatycznego. Tego typu zadania rozwijają umiejętność orientowania się w schematach oraz rozwiązywania problemów, co stanowi ważną część kompetencji cyfrowych. Z podobnymi zadaniami uczniowie spotykają się również na lekcjach Nowej Informatyki.

Rozdział: Wagi, karta pracy

strona 12, zadanie 10 (aplikacja GeoGebra)

Uczniowie mogą ponownie spróbować konstrukcji zarówno na papierze, jak i z pomocą programu. Porównanie obu sposobów warto zawsze omówić wspólnie z uczniami. W GeoGebra uczniowie mogą zobaczyć kolejne kroki konstrukcji – klikając strzałki na dole panelu nawigacyjnego. Na papierze można mierzyć za pomocą linijki, ale uczniów zachęcamy do przenoszenia odległości za pomocą cyrkla. W gotowej konstrukcji uczniowie mogą użyć narzędzia „Odległość”, by sprawdzić swoje pomiary i ocenić ich dokładność w porównaniu z tymi wykonanymi na papierze.

strona 13, zadanie 13 (Excel)

Uczniowie mają przygotowaną tabelę z wypełnionymi liczbami 0 i 1. Ich zadaniem jest uzupełnienie całej tabeli od 0 do 99. Jeśli uczniowie nie mają dużego doświadczenia z edytorem arkuszy kalkulacyjnych, mogą próbować uzupełniać ciąg liczbowy pojedynczo. W tym miejscu warto nauczyć ich szybkiego tworzenia serii. Uczniowie zaznaczają oba wpisane już numery, a następnie przeciągają prawy dolny róg zaznaczenia, aby utworzyć ciąg aż do 9. Potem w podobny sposób tworzą drugi wiersz z liczbami 10 i 11. Gdy dwa pierwsze wiersze są gotowe, zaznaczamy je razem i ponownie przeciągamy dolny prawy róg – w ten sposób uzupełniamy całą tabelę.

0	1								

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11								

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Jak działają sumy liczb w kolumnach, wierszach czy całej tabeli, najlepiej zrozumieć poprzez uzupełnianie konkretnych kolumn i wierszy. Wtedy uczniowie zauważą pewne prawidłowości. Możemy przy tej okazji nauczyć ich prostej funkcji SUMA, ewentualnie również prostego wzorca do sumowania komórek. W obu przypadkach kluczowe jest rozpoczęcie funkcji w edytorze arkuszy kalkulacyjnych od symbolu =.

Komentarz do karty pracy:

Dzięki pierwszej aktywności uczniowie opanowują umiejętność pracy z arkuszem kalkulacyjnym – konkretnie tworzenia ciągów liczbowych poprzez kopiowanie gotowych sekwencji (przeciąganie prawego dolnego rogu zaznaczonego ciągu). Arkusz kalkulacyjny „rozumie”, że gdy zaznaczymy np. liczby 1, 2 i 3, to należy kontynuować ten ciąg w tym samym schemacie.

Następnie uczniowie rozwiązują zadanie z parkietami; mogą ponownie wykorzystać arkusz kalkulacyjny do szybkiego sprawdzenia rozwiązania – wystarczy zaznaczyć odpowiednie liczby, a w prawym dolnym rogu pojawi się ich suma. Jeśli uczniowie zbiorą wystarczająco dużo pojedynczych przykładów i zapiszą je w tabeli, odkryją, że suma trzech liczb odpowiada trzykrotności liczby środkowej.

Ostatnie trzy zadania dotyczą sumowania wierszy, kolumn i wszystkich liczb w tabeli. Sprawdzenie jest znów szybkie, ale uczniowie najpierw samodzielnie rozwiązują zadania i obserwują, jak zmieniają się sumy przy przesuwaniu wierszy i kolumn. W przypadku sumy wszystkich liczb w tabeli możemy wspomnieć o pomyśle wielkiego matematyka Gaussa, który według legendy jako pierwszy zastosował tę metodę. Polega ona na tym, że dodając liczby 0, 1, 2, ..., 99, łączymy liczby z początku i końca w pary (0+99, 1+98, 2+97, ..., 49+50), tworząc same sumy równe 99. Wystarczy potem ustalić, ile jest takich par ($50 \cdot 99 = 4\,950$).

Aktywność: Możliwość przećwiczenia zadań w środowisku „Wagi” oferuje aplikacja dostępna pod linkiem: <https://dai.fmph.uniba.sk/~borovan/HM/>. Uczniowie mogą pobrać aplikację ze sklepu Google Play na telefon i stopniowo rozwiązywać w niej zadania o rosnącym stopniu trudności z użyciem odważników.

Rozdział: Równania I, PL

strona 15, zadanie 4 (Excel)

W Excelu została utworzona tabela z czterema formułami opisującymi zależności z treści zadania. Jednym z celów takiego zadania jest nauczenie uczniów pracy z prostymi formułami i korzystania z gotowych wzorów (przeciąganie prawego dolnego rogu). Formuły zawierają jedynie proste operacje dodawania i odejmowania.

Drugi cel ma charakter matematyczny. Matematyzacja - to wymagająca umiejętność. Praca ze zmienną często sprawia uczniom trudności. Jedną z rzeczy, które pomagają uczniom lepiej zrozumieć temat, jest stosowanie konkretnych liczb. Tutaj uczniowie mogą na podstawie 20 wierszy sprawdzić, czy utworzony wzór (zależność) działa. Z drugiej strony pokazuje to, że jeśli zależność działa dla większej liczby pojedynczych przypadków (par liczb), to prawdopodobnie będzie działać dla dowolnych liczb.

Jeśli uczniowie zrozumieją utworzone formuły, to zostaną poproszeni o stworzenie podobnej tabeli dla przynajmniej jednego zadania z ćwiczenia 15/5.

Komentarz do karty pracy:

W zadaniu próbujemy wraz z uczniami zmatematyzować opis słowny. To trudna umiejętność, dlatego możemy użyć edytora arkuszy jako narzędzia weryfikującego. Uczniowie skorzystają z przygotowanej tabeli do zadania 15/4, a w kolejnym zadaniu mogą spróbować stworzyć podobną tabelę samodzielnie. Ważne, by potrafili utworzyć proste formuły z działaniami matematycznymi. W Excelu zawsze zapisujemy je, zaczynając od znaku równości (=). Uczniowie najpierw tworzą tabelę, w której uzupełniają konkretne liczby bułek i kajzerek. Następnie tworzą proste formuły tak, aby odpowiadały zapisom z treści zadania 15/5 a). Dzięki konkretnym liczbom mogą sprawdzić, czy dane zapisy są prawdziwe czy fałszywe.

Do tworzenia formuł z działaniami matematycznymi nawiązuje również aktywność 2, w której należy do wprowadzonej liczby stworzyć formułę tak, aby obliczała podwojoną, potrojoną itd. wartość tej liczby.

Rozdział: Liczby dziesiętne, PL

strona 19, zadanie 4 (Excel)

W Excelu zostały utworzone trzy tabele (arkusz 1, arkusz 2 i arkusz 3). Pierwsze dwa arkusze zawierają działające formuły, dzięki którym uczniowie mogą weryfikować swoje wcześniejsze obliczenia. Nie uważamy za właściwe używać arkusza kalkulacyjnego do samodzielnego rozwiązywania zadania, lecz raczej jako narzędzia weryfikacyjnego. Uczniowie bowiem pracują z liczbami dziesiętnymi, dodają je lub mnożą, ewentualnie wykorzystują pojęcie proporcjonalności. Rozwiązywaniu zadania towarzyszy więc szereg ważnych idei matematycznych. Chcemy, aby uczniowie przyswajali je sobie dzięki własnym obliczeniom i rozwiązaniom.

Poza sprawdzaniem wyników możemy uczniom zaproponować również drugą aktywność. To bardziej wymagająca koncepcja, dlatego pozostawiamy nauczycielowi decyzję, czy będzie ją realizować z uczniami. Tabele w arkuszach 1 i 2 są funkcjonalne, natomiast tabela w arkuszu 3 – nie. Uczniowie mogą zbadać, czym różnią się obie formuły. W arkuszu 1 wszystko działa, ponieważ we wzorze na stałe wpisano niezmienną liczbę 1,4. W arkuszu 2 działa, ponieważ zastosowano adresowanie bezwzględne (absolutne) z użyciem klawisza F4 i zablokowaniem komórki.

Uczniowie są proszeni o stworzenie podobnej tabeli do kolejnego zadania 19/5.

Komentarz do karty pracy:

Adresowanie bezwzględne może być dla uczniów trudne, dlatego nauczyciel powinien rozważyć użycie tej karty pracy. Uczniowie dostrzegą różnicę między adresowaniem względnym i bezwzględnym w tabelach do zadania 19/4. Działający wzór zawiera tzw. „dolary”, które w Excelu wstawiamy np. klawiszem F4. To konwencja, którą nauczyciel może uczniom wyjaśnić. Raczej jednak zakładamy, że uczniowie wpiszą stałą wartość liczbową do wzoru i nie będą musieli rozróżniać obu typów adresowania.

W pierwszym zadaniu mają „jednostkową” długość 23 mm, w drugim muszą znaleźć informację o cenie złota – najprawdopodobniej w Internecie. Tym samym wchodzimy również w obszar pracy z danymi.

Rozdział: Geometria manipulacyjna, PL

strona 23, zadanie 6 (aplet GeoGebra)

W aplecie uczniowie mogą kompilować prostokąty za pomocą suwaków. Dzięki nim tworzą prostokąty o wymiarach a , b . W kontekście terminologicznym wspomina się również o kwadratach, które nie są tu traktowane jako szczególny przypadek prostokąta. Uczniowie mogą weryfikować swoje rozwiązania poprzez wyświetlenie wyników, dlatego program ten może służyć jako narzędzie sprawdzające. Oczywiście można również wykorzystać potencjał programu jako generatora zadań – bardzo szybko można wygenerować dużą liczbę pojedynczych, odizolowanych przypadków (prostokątów), których pola uczniowie obliczają. W przeciwieństwie do podręcznika, w aplecie domyślnie włączona jest siatka, którą można wyłączyć razem z uczniami (prawym przyciskiem myszy na obszarze rysunku, opcja „Pokaż siatkę”). Z perspektywy budowania pojęcia, rozwiązywanie zadań na siatce jest preferowane – odkryta zależność jest następnie przenoszona na czystą kartkę (na poziom abstrakcyjny).

strona 23, zadanie 6 (Excel)

To, co uczniowie rozwiązali i odkryli w programie GeoGebra, chcemy przenieść na poziom abstrakcji z wykorzystaniem prostego wzoru. W arkuszu kalkulacyjnym uczniowie mają do dyspozycji tabelę, w której mogą zapisywać wymiary prostokątów (tych rozwiązanych lub nie) z programu GeoGebra. Ich zadaniem jest stworzenie wzoru, który na podstawie podanych wymiarów obliczy pole prostokąta. Z perspektywy matematycznej i procesu poznawcze-

go sprawdzamy, czy uczniowie opanowali wzór na poziomie abstrakcyjnym. Drugim aspektem jest umiejętność użycia programu, w którym uczniowie muszą umieć stworzyć prosty wzór do mnożenia. Mnożenie rozpoczynamy od symbolu =, aby Excel był gotowy do obliczeń. Następnie klikamy pierwszy wymiar, dodajemy znak mnożenia * (np. z klawiatury numerycznej), klikamy drugi wymiar i zatwierdzamy klawiszem ENTER. W komórce powinien pojawić się wzór do obliczenia pola prostokąta, gdy znamy oba wymiary. Arkusz kalkulacyjny może następnie generować wiele pojedynczych zadań, a uczniowie powinni umieć kopiować utworzony wzór, np. przeciągając prawy dolny róg komórki.

Komentarz do karty pracy:

Na początku uczniowie rozwiązują zadanie korzystając z podręcznika, a następnie mogą sprawdzić swoje rozwiązanie za pomocą przygotowanego apletu lub samodzielnie stworzyć podobny aplet. W tym celu potrzebują użyć narzędzi takich jak „Odcinek o stałej długości”, „Suwak”, „Pole powierzchni” itd. Ostatnim etapem tej części jest przeniesienie danych do arkusza kalkulacyjnego. Uczniowie otwierają plik i stopniowo uzupełniają w nim wymiary prostokąta. Ich zadaniem jest stworzenie wzoru do obliczania pola prostokąta. Jest to prosty wzór, ale jeśli uczniowie zapiszą go poprawnie, świadczy to o dobrym opanowaniu podstawowych wzorów oraz o tym, że znają wzór na pole prostokąta.

Ostatnia aktywność jest bardziej wymagająca. Uczniowie mogą mieć trudność z określeniem wymiarów prostokąta – są w stanie zrobić to dopiero na późniejszym etapie edukacji, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. W tym miejscu oczekujemy wykorzystania metody „ramowania” lub układania pełnych kwadratów. Korzystając z programu GeoGebra, uczniowie mogą sprawdzić poprawność swoich rozwiązań.

Rozdział: Praca z danymi, PL

strona 31, zadanie 1 (Excel)

Uczniowie zdobywają doświadczenie w tworzeniu wykresów – konkretnie słupkowych i kołowych. To nauczyciel decyduje, na jakim etapie i czy w ogóle wprowadzi program do zajęć. Funkcja arkusza kalkulacyjnego może mieć charakter wyłącznie weryfikacyjny. Program oferuje szerokie możliwości eksperymentowania – uczniowie mogą tworzyć wiele zadań i wykresów. Tworzenie wykresów nie jest trudne – przez kartę „Wstawianie” uczniowie wybierają tylko odpowiedni typ wykresu.

Częstym błędem jest jednak to, że uczniowie nie zaznaczają danych, na podstawie których chcą wykres utworzyć. To pierwszy krok, który muszą wykonać: zaznaczyć komórki z wartościami, które mają się znaleźć na wykresie. W tym miejscu pomoc nauczyciela może być nieodzowna.

strona 33, zadanie 5 (Excel)

Zadanie jest podobne do zadania ze strony 31/1. Różnica polega jedynie na tym, że uczniowie na podstawie wykresu kołowego tworzą wykres słupkowy oraz na tym, że muszą samodzielnie obliczyć poszczególne wartości (nie są one widoczne na wykresie).

Komentarz pozostaje taki sam, jak w zadaniu 31/1. Tabeli nie trzeba uczniom udostępniać – można ich zachęcić do utworzenia jej samodzielnie w nowym arkuszu.

strona 34, zadanie 11 (Excel)

Aktywność „Średni uczeń całej klasy” cieszy się zwykle dużym zainteresowaniem. Może być realizowana w ramach kilku lekcji lub np. dnia projektowego. Zadaniem uczniów jest wymyślić kilka „zjawisk”, dla których można obliczyć średnią arytmetyczną w klasie. Najpierw zbierają dane, następnie je zapisują i analizują – obliczają średnią arytmetyczną.

Z uczniami można porównać efektywność liczenia na papierze i z pomocą arkusza kalkulacyjnego. W Excelu funkcję „ŚREDNIA” wywołuje się za pomocą symbolu = (znak równości). Uczniowie mogą też porównać swoje wyniki z wartościami wymaganego średniego ucznia klasy.

Komentarz do karty pracy:

Aktywność skupia się na wielu celach. Uczniowie pracują z danymi – ich zbieraniem, zapisywaniem, analizą, a czasem również interpretacją. Tworzenie tabeli i wykresu nie powinno być dla nich trudne.

Częstym błędem jest jednak tworzenie wykresu zanim zaznaczą odpowiednie dane – należy podkreślić, że jest to pierwszy krok.

Rozdział: Podzielność, PL

strona 36, zadanie 6 (Excel)

Do zadania 36/6 przygotowano tabelę, która symuluje pracę z kamieniami. Oczywiście manipulacja fizycznymi kamieniami na kartce ma – przynajmniej w początkowych aktywnościach – pierwszeństwo. Zamiast wkładania kamieni do odpowiednich „przegródek”, uczniowie w Excelu zapisują ich liczbę. W kolumnie F znajduje się wzór, który pokazuje liczbę utworzoną przez rozmieszczenie odpowiednich rzędów (kamieni). Z matematycznego punktu widzenia stworzymy liczbę z jej dziesiętnego rozwinięcia. W kolumnie G zastosowana jest funkcja MOD, która pokazuje resztę z dzielenia liczby przez 3.

Z bardziej zmotywowanymi uczniami można spróbować samodzielnie stworzyć podobną tabelę, jednak zakładamy raczej, że tabela będzie służyła do zbierania izolowanych przypadków (doświadczeń). Dzięki temu uczniowie odkrywają, że wszystkie liczby złożone z trzech kamieni są podzielne przez 3. Uczniowie mogą dalej eksperymentować i używać także innej liczby kamieni.

Komentarz do karty pracy:

Zadanie 1 i aktywność 1 są ze sobą ściśle powiązane. Celem jest pokazanie uczniom, że użycie narzędzi TIK może znacząco przyspieszyć ich pracę. Najpierw uczniowie manipulują kamieniami lub rysują sytuacje, tworzą liczby i sprawdzają, czy są podzielne przez trzy. Weryfikację tę można bardzo łatwo przeprowadzić w Excelu – wpisując utworzone liczby, a Excel dzieli je przez 3 za pomocą funkcji MOD, która zwraca resztę z dzielenia przez 3.

To samo zadanie można powtórzyć z rzędem tysięcy. Uczniowie zauważają, że dzięki przeciągnięciu wzoru mogą szybko uzyskać dużą liczbę izolowanych przypadków. W ten sposób pojawia się poszukiwana zależność związana z kryterium podzielności przez 3.

Ostateczne potwierdzenie zależności następuje dzięki eksperymentowaniu w tabeli z rzędem 10 000 oraz przy użyciu różnych liczby kamieni. Uczniowie odkrywają, że aby liczba była podzielna przez 3, musi być zbudowana z liczby kamieni będącej wielokrotnością liczby 3.

Rozdział: Kąt, PL

strona 40, zadanie 8 (aplet GeoGebra)

W aplecie został utworzony i domyślnie ustawiony foremny sześciokąt tak, aby odpowiadał treści zadania. Uczniowie mogą wyświetlić miarę poszukiwanego kąta, więc program może służyć jako narzędzie weryfikujące poprawność rozwiązania.

Aplet daje również uczniom możliwość eksperymentowania – za pomocą suwaka można zmieniać liczbę boków foremnego wielokąta w zakresie $n = 3-12$. W ten sposób wchodzimy na teren tzw. teorii modelu generycznego (TGM), kiedy uczniowie z serii izolowanych przypadków mogą dojść do ogólnego wniosku (modelu generycznego). W tym przypadku chodzi o zależność, że poszukiwany kąt w wielokącie foremnym można obliczyć jako $360^\circ : n$.

strona 41, zadanie 9 (aplet GeoGebra)

Aplet służy do określania miar kątów, a właściwie do ich szacowania. Uczniowie mogą ustawić wartość kąta za pomocą suwaka, a następnie wyświetlić rzeczywisty wynik. Wyniki są zawsze zaokrąglane do pełnych stopni.

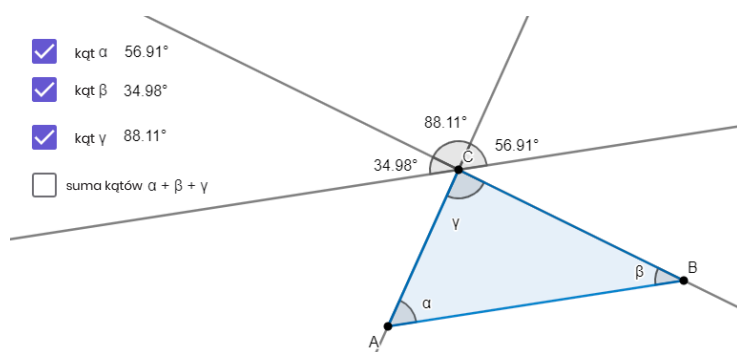
Aplet daje również możliwość zabawy – uczniowie mogą rywalizować, kto lepiej oszacuje kąt. Gra może się toczyć w kilku rundach w mniejszych grupach, gdzie wyłaniany jest najlepszy „estymator kątów”.

strona 41, zadanie 12 (aplet GeoGebra)

Aplet służy uczniom do sprawdzenia lub potwierdzenia jednej z podstawowych zasad geometrycznych ze szkoły podstawowej: suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° .

Uczniowie dochodzą do tej idei również poprzez działania manipulacyjne opisane w podręczniku. Zdarza się jednak, że niektórzy uczniowie nie są do końca przekonani, że złożenie trzech kątów trójkąta tworzy kąt półpełny. Tu pomocna może być GeoGebra, która na dowolnie stworzonym trójkącie potwierdza tę zależność.

Z uczniami można także w GeoGebry skonstruować znany dowód potwierdzający tę zależność – patrz rysunek. Dowód ten opiera się na zgodności kątów odpowiadających i wierzchołkowych, dzięki czemu wszystkie trzy kąty można tak „przenieść”, by tworzyły razem prostą – czyli kąt 180° .



Komentarz do karty pracy:

Karta pracy nawiązuje do wcześniejszych aktywności, dlatego można ją wykorzystać jako podsumowanie tych zadań. Uczniowie w pierwszym ćwiczeniu najpierw rozwiązują zadanie z podręcznika, a następnie eksperymentują z apilem. Idealnie byłoby, gdyby najpierw samodzielnie zastanowili się, które kąty potrafią obliczyć. Te, których nie potrafią, uzupełniają, korzystając z opcji wyświetlenia wyniku. Na podstawie uzupełnionej tabeli oraz większej liczby pojedynczych przypadków mogą odkryć, że szukany kąt ma miarę $360:n$.

Drugie ćwiczenie koncentruje się na określaniu miary kąta. Uczniowie szacują wielkość kąta, a następnie sprawdzają swój szacunek poprzez wyświetlenie rzeczywistej miary. Zajęcie to może mieć formę gry. Generalnie, jeśli często rozwiązujemy z uczniami zadania polegające na szacowaniu (miary kąta, długości minuty, wymiarów przedmiotów czy pomieszczeń itp.), uczniowie poprawiają swoje umiejętności w tym zakresie.

Ostatnia aktywność koncentruje się na jednej z centralnych właściwości geometrycznych omawianych w szkole podstawowej – sumie miar kątów wewnętrznych w trójkącie. Najpierw uczeń rozwiązuje zadanie dotyczące swojego trójkąta, a następnie trójkątów kolegów i koleżanek z klasy. W praktyce często zdarza się, że suma 180° nie wychodzi idealnie – uczniowie niedokładnie mierzą, zaokrąglają wyniki lub popełniają błędy obliczeniowe. Dlatego pomocne jest oprogramowanie, które podaje bardzo precyzyjne wyniki i pokazuje, że zależność ta jest prawdziwa dla dowolnego trójkąta. Można to również wesprzeć znaną aktywnością manipulacyjną polegającą na rozrywaniu kątów i ich układaniu w kąt półpełny.

Rozdział: Geometria na płaszczyźnie, KP, KP

strona 47, zadanie 5 (aplet GeoGebra)

Metoda ramowania - to uniwersalna metoda (strategia) obliczania pola trójkąta w siatce. Uczniowie, bazując na doświadczeniu, preferują składanie części kwadratów w całe, które następnie sumują. Jednak w przypadku „trud-

niejszych” trójkątów strategia ta może być zawodna – wyniki uczniów często różnią się np. o pół kwadracika itp. Dlatego podsuwamy im inne, dokładniejsze strategie. Jedną z nich jest właśnie metoda ramowania: od pola ramy (kwadratu lub prostokąta) stopniowo odejmujemy pola „zbędnych” trójkątów. Po zdobyciu większego doświadczenia z siatką możemy uczniom zaproponować aplet, który wizualizuje wszystko, co jest potrzebne do obliczeń. Uczniowie mogą w aplecie zmieniać wymiary ramy i liczyć pola poszczególnych trójkątów. Korzystając z opisanego związku, obliczają pole trójkąta z zadania.

Można postawić pytanie, czy uczniowie potrafią obliczyć pola trzech trójkątów (w aplecie AEF, EBC, FCD). W tym celu można przygotować aplet z prostokątami podzielonymi przekątną, która dzieli pole prostokąta na połowy – to właśnie zasada stosowana przy obliczaniu pól tych trzech trójkątów. Zawsze są one połową jakiegoś prostokąta lub kwadratu.

strona 47, zadanie 6 (aplet GeoGebry)

Tak zwana zasada Cavalieriego – to jedna z kluczowych idei w konstruktywistycznym wyprowadzaniu wzoru na pole trójkąta. Zgodnie z nią możemy przesuwając trzeci wierzchołek trójkąta po prostej równoległej do podstawy, a pole wszystkich tak powstałych trójkątów pozostaje takie samo.

Uczniowie wykonują obliczenia samodzielnie, a GeoGebra wykorzystują jako narzędzie weryfikacyjne. Odkrywają, że wszystkie trójkąty z zadania mają to samo pole (1,5). Może to skłonić ich do dalszego testowania, czy zależność ta działa również dla innych trójkątów. Służy do tego aplet, który umożliwia tworzenie wielu odrębnych modeli, systematycznie pokazujących, że zależność ma charakter generalny.

strona 47, zadanie 7 (aplet GeoGebry)

Uczniowie prawdopodobnie użyją apletu do weryfikacji swoich wyników. Zmieniając odcinek AB, mogą również tworzyć nowe, odrębne przypadki/zadania. Po zebraniu wystarczającej liczby przykładów, mogą dostrzec uogólnienie: współrzędne środka odcinka są średnią arytmetyczną odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

strona 47, zadanie 8 (aplet GeoGebry)

Obliczanie pola kwadratu zazwyczaj nie sprawia uczniom trudności. Na podstawie serii odrębnych przypadków (kwadratów) w siatce uczniowie odkrywają ogólną metodę obliczania pola (wyrażoną liczbą kwadracików). Uczeń powie: „Obliczam to jako bok razy bok.” Następnie sprawdzają, że ten związek działa również bez siatki. Podobną funkcję pełni GeoGebra. Najpierw uczniowie, korzystając z niej, zajmują się odrębnymi przypadkami (kwadraty w siatce), odkrywają opisaną zależność, a potem – „wyłączając” siatkę – weryfikują charakter ogólnej zależności. Program można wykorzystać również wyłącznie jako narzędzie kontrolne.

Aplet można także wykorzystać przy kolejnym zadaniu 47/9, w którym uczniowie szukają długości boku kwadratu znając jego pole. Nie należy oczekiwać, że nazwą pierwiastek, ale potrafią stwierdzić, że: „Szukamy liczby, którą po pomnożeniu przez samą siebie otrzymamy dane pole.”

strona 48, zadanie 11 (aplet GeoGebry, Excel)

Aplet służy uczniom do zdobywania pierwszych doświadczeń z funkcją liniową i jej wykresem. Uczniowie szybko zauważają, że wszystkie punkty utworzone zgodnie z poleceniem leżą na prostej. Prawdopodobnie – jeśli zapisują ich współrzędne w przygotowanej tabeli Excela – zauważą też związek arytmetyczny między nimi (tutaj związek proporcjonalności prostej). Mogą dalej eksperymentować, zmieniając współrzędne wejściowego „wektora”, co prowadzi do kolejnych zadań lub umożliwia sprawdzanie innych zadań z zeszytu ćwiczeń.

Komentarz do karty pracy:

Karta pracy dotycząca metody ramowania zaczyna się od zadania z apletem, w którym uczniowie mogą weryfikować swoje rozwiązania. Aplet umożliwia także zmianę wymiarów prostokąta i tworzenie nowych zadań. Najważniejsze jest to, że wizualizuje metodę ramowania. Uczniowie widzą, że pole szukanego trójkąta obliczają jako pole ramy „minus” pola wszystkich „zbędnych” trójkątów.

Aplet do zadania 47/6 skupia się na zasadzie Cavalieriego. Uczniowie mogą eksperymentować z położeniem punktu D oraz parametrami wyjściowego trójkąta. Program może służyć jako narzędzie sprawdzające. Uczniowie zdobywają kolejne doświadczenia z zasadą, że pole trójkąta nie zmienia się, jeśli jego podstawa pozostaje taka sama, a trzeci wierzchołek „porusza się” po prostej równoległej do niej.

Druga karta pracy koncentruje się na środku odcinka. Do tego można wykorzystać aplet z zadania 47/7. Najpierw uczniowie pracują z siatką, następnie mogą weryfikować swoje wyniki z pomocą apletu. Umożliwia on tworzenie wielu odrębnych przypadków. Dlatego oczekuje się, że uczniowie odkryją zależność średniej arytmetycznej (środek odcinka ma współrzędne będące średnią arytmetyczną współrzędnych końców odcinka).

Rozdział: Liczby wymierne

strona 61, zadanie 17 (Excel)

Zrozumienie mnożenia liczb dziesiętnych zależy od zrozumienia tzw. izomorfizmu. Zarówno przy użyciu kalkulatora, jak i arkusza kalkulacyjnego uczniowie odkrywają, że kiedy mnożą liczby oraz ich warianty (powstałe przez przesunięcia rzędów wielkości tych liczb), w wynikach pojawiają się te same liczby (z różnicą tylko w rzędach dziesiętnych). To prowadzi do uniwersalnej metody obliczeniowej: liczby mnożymy niezależnie od ich rzędów, a następnie tylko odpowiednio wstawiamy przecinek dziesiętny. Pomaga w tym oszacowanie wyniku lub wystarczająca liczba odrębnych przypadków, dzięki którym uczniowie potrafią samodzielnie sformułować znaną zasadę dotyczącą przesuwania przecinka dziesiętnego.

Warto dodać, że korzystanie z arkusza kalkulacyjnego ma niezaprzeczalne zalety w porównaniu z kalkulatorem — poszczególne sytuacje można łatwo zapisać, a także szybko generować dużą liczbę kolejnych doświadczeń.

Rozdział: Duże liczby, karta pracy

strona 62, zadanie 1 (Excel)

Uczniowie mogą wykorzystać arkusz kalkulacyjny do przejrzystego zapisu danych. Możemy ich zachęcić, aby do niektórych zadań stworzyli prosty wzór – np. w zadaniu e), w którym mogą użyć formuł z dodawaniem i odejmowaniem, ewentualnie funkcji SUMA. Do posortowania państw według wielkości uczniowie mogą skorzystać z opcji „Dane” i użyć funkcji „Sortuj”. Celem jest to, aby uczniowie dostrzegli zalety korzystania z narzędzia, które upraszcza ich pracę.

strona 62, zadanie 2 (Excel)

W przeciwieństwie do zadania 62/1 z podręcznika, tutaj brak jest odpowiednich danych. Pierwszym zadaniem uczniów jest więc zebranie danych z odpowiedniego źródła. Dalszy komentarz pozostaje taki sam jak w przypadku zadania 62/1. Warto jednak zwrócić uwagę na jeden błąd: jeśli uczniowie kopiują dane z Internetu (np. powierzchnie państw), może się zdarzyć, że arkusz kalkulacyjny odczyta je jako tekst i nie będzie z nimi poprawnie pracował. Lepiej jest przepisać liczby ręcznie do komórek lub ustawić odpowiedni format komórek na „liczbowy”.

strona 62, zadanie 3 (Excel)

Uczniowie są zachęceni do stworzenia formuły mnożenia dwóch liczb. Jednym z celów jest więc proste programowanie w Excelu. Matematycznym celem zadania jest mnożenie większych liczb i praca z rzędami wielkości. Podobnie jak w zadaniu 61/17 dotyczącym mnożenia liczb dziesiętnych, uczniowie odkrywają, jak takie mnożenie działa: wystarczy pomnożyć „podstawowe” liczby, a następnie uwzględnić odpowiedni rząd wielkości, czyli dodać odpowiednią liczbę zer. Im więcej odrębnych przykładów uczniowie zobaczą i rozwiążą, tym lepiej utrwala sobie tę ideę. Z bardziej zmotywowanymi uczniami można spróbować stworzyć podobną tabelę, opartą na zasadzie, że można „zamrozić” komórkę, tak aby nie zmieniała się w formule. Innymi słowy, stosujemy adresowanie bezwzględne komórek, najczęściej za pomocą klawisza F4.

strona 62, zadanie 4 (Excel)

Podobną tabelę jak w zadaniu 62/3 przygotowaliśmy również do zadania 62/4, dotyczącego operacji dzielenia. Obowiązuje ten sam komentarz, co w przypadku zadania 62/3.

strona 64, zadania 15 i 16 (Excel)

Dla uczniów przygotowano tabelę, w której mają rejestrować liczbę warstw papieru w zależności od liczby jego złożań na pół. Pod względem matematycznym uczniowie zdobywają doświadczenie z potęgami liczby dwa. Liczba 2 odgrywa więc kluczową rolę przy tworzeniu formuły. Niektórzy mogą wpisać liczbę 2 do osobnej komórki i dalej z nią pracować, inni od razu stworzą formułę: =komórka powyżej * 2, którą następnie kopiują, przeciągając prawy dolny róg komórki. Jeśli uczeń skorzysta z osobnej komórki (gdzie wpisuje liczbę 2), należy zadbać o to, by adres komórki był stały – czyli użyć adresowania bezwzględnego (klawisz F4).

Excel można wykorzystać jako narzędzie do sprawdzania wyników albo do obliczania wyników trudniejszych wyzwań. Po rozwiązaniu zadania uczniowie zauważą, że po dwudziestu złożeniach papier osiągnie wysokość ok. 105 metrów. To daje możliwość dalszych eksperymentów, np. „Ile razy musielibyśmy złożyć papier, aby uzyskać przybliżoną odległość między Warszawą a Lublinem?”.

strona 65, zadanie 19 (Excel)

Podobnie jak w zadaniu 36/6, również tutaj przygotowano tabelę symulującą pracę z kamieniami. Zamiast umieszczać kamienie w odpowiednich „przegródkach”, uczniowie zapisują ich liczbę. W kolumnie F znajduje się formuła obliczająca, jaką liczbę tworzą rozmieszczone kamienie – konstruujemy w ten sposób liczbę na podstawie jej zapisu dziesiętnego. W kolumnie G umieszczona jest funkcja MOD, która zwraca resztę z dzielenia liczby przez dziewięć. Z bardziej zmotywowanymi uczniami można spróbować stworzyć podobną tabelę, choć zazwyczaj tabela ta służy jako zbiór izolowanych przypadków (liczb). W ten sposób uczniowie odkrywają, że wszystkie liczby złożone z dziewięciu kamieni (suma ich cyfr wynosi 9) są podzielne przez 9. Uczniowie mogą dalej eksperymentować, używając różnej liczby kamieni. Może to być dla nich jedno z pierwszych doświadczeń z kryterium podzielności przez 9 (czyli jak rozpoznać liczbę podzielną przez 9 bez faktycznego dzielenia).

Strona 65, zadanie 21

Do tego zadania nie został przygotowany konkretny plik pomocniczy, ale chcemy tu raczej przedstawić ideę, jak pracować z tego typu zadaniami z wykorzystaniem TIK. Za pomocą „dymków” z różnymi opiniami wywołujemy u uczniów dyskusję na temat poprawności poszczególnych wypowiedzi i w ten sposób efektywnie sprawdzamy poziom zrozumienia danego zagadnienia przez uczniów.

Tego typu zadania nazywane są Concept Cartoons. Jest to obrazek przedstawiający jakąś – zazwyczaj dobrze znaną uczniom – sytuację (zadanie w tle). Kolejnym elementem tej grafiki jest kilka postaci, które w formie komiksowych „dymków” komentują przedstawioną sytuację. Te krótkie wypowiedzi mają swoje zasady. Na jednym Concept Cartoonie zwykle przedstawia się od 3 do 5 fikcyjnych postaci. Zazwyczaj zadanie zaczyna się czytać w lewym górnym rogu, a następnie kontynuuje zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Uczniowie otrzymują te zadania zazwyczaj z pytaniami typu: „Co o tym myślisz?”, „Czy dzieci na obrazku mają rację?”, „Dlaczego?” lub „Jak ty byś skomentował(-a) tę sytuację?” i podobnymi. Uczniowie następnie dyskutują nad odpowiedziami. Nauczyciel pełni przede wszystkim rolę moderatora i ewentualnie zadaje pytania uzupełniające.

Uczniowie mogą spróbować samodzielnie tworzyć Concept Cartoons za pomocą różnych aplikacji: Canva, MS Word, ale także - specjalnych aplikacji do tworzenia komiksów, np. <https://www.storyboardthat.com/cs/comic-maker>.

Komentarz do karty pracy:

Karta pracy służy jako podsumowanie wcześniejszych zadań/aktywności. Jeśli realizowałeś/aś zadania z uczniami w pojedynczo, karta pracy może nie być potrzebna.

Pierwsza aktywność odnosi się do doświadczeń z potęgami liczby 2. Często nawet dla starszych uczniów zaskoczeniem jest, jak szybko potęgi rosną. Uczniowie mogą wykorzystać Excela, aby za pomocą prostego wzoru szybko uzupełnić tabelę. Wystarczy pomnożyć pierwszą komórkę przez dwa i skopiować wzór przeciągając dolny prawy róg komórki. Uzupełniając tabelę prostym wzorem mnożącym, uczniowie mogą też szybko obliczyć grubość złożonego papieru (liczbę warstw mnożą przez grubość jednej kartki).

Tę samą aktywność i zadania, jak przy podzielności przez 3 (zadanie 36/6), uczniowie mogą powtórzyć w karcie pracy do zadania 65/19. Tam przedmiotem badania jest kryterium podzielności przez 9. Za pomocą Excela uczniowie generują wiele liczb, sprawdzają, które są podzielne przez 9, i stopniowo rozbudowują zadanie o kolejne rzędy wielkości. Odkrywają, że liczba jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr (czyli „liczba kamieni”) jest wielokrotnością liczby 9.

Rozdział: Wyrażenia liczbowe, PL

strona 72, zadanie 8 (aplet ggb)

Uczniowie mogą wykorzystać aplet jako narzędzie do sprawdzenia poprawności swoich rozwiązań podczas pracy na siatce lub w trakcie inscenizacji zadania. Dzięki prostej zmianie wejściowego (niebieskiego) kształtu od razu zobaczą jego obraz w symetrii środkowej względem punktu S. Zalecamy, aby najpierw inscenizować te zadania (odegrać je w klasie z uczniami stojącymi do siebie tyłem, którzy otrzymują „takie same” polecenia), a także wykonywać konstrukcje na papierze w kratkę. Można też zachęcić uczniów do stworzenia podobnego apletu samodzielnie lub w grupach. Jeśli okaże się to dla nich zbyt trudne, nic nie szkodzi – z podobną aktywnością spotkają się również na kolejnym etapie edukacji. Nie jest to jednak skomplikowane – wystarczy skonstruować punkt (środek symetrii), dowolny łamany odcinek i za pomocą narzędzia „Symetria środkowa” uzyskać jego obraz względem punktu S.

strona 72, zadanie 10 (Excel)

Uczniowie prawdopodobnie sami odkryją „magiczne” właściwości zadań 72/10 a) i b), licząc na kartce. W jednym przypadku wynik zawsze wynosi 9, w drugim zawsze liczba z koperty (czyli jeśli w kopercie jest liczba 5, to wynik również wynosi 5). Do takich wniosków uczniowie dojdą, jeśli przekształcą wyrażenia algebraiczne (pomnożą nawiasy, dodadzą lub odejmą wyrazy podobne). Do tego jednak mogą dojść tylko niektórzy uczniowie – w istocie poszukują oni dowodu, dlaczego zawsze tak wychodzi.

Arkusz kalkulacyjny można wykorzystać do generowania dużej liczby izolowanych przykładów. Uczniowie są proszeni o dokumentowanie poszczególnych rozwiązań. Mogą też sprawdzać, czy obliczyli poprawnie.

Do pracy w grupach można zachęcić uczniów do stworzenia podobnego zadania i tabeli samodzielnie. Mogą spróbować zaprogramować prosty wzór, który dla danej liczby wejściowej obliczy liczbę wyjściową. Następnie zadanie mogą przekazać innej grupie.

Przypominamy tylko, że każde z zadań znajduje się na innym arkuszu (Arkusz 1 i Arkusz 2) w tym samym pliku.

strona 73, zadanie 12 (Excel)

Zadanie nastawione na znalezienie uogólnienia jest przeznaczone raczej dla uczniów zaawansowanych. Pozostali uczniowie mogą wykorzystać je jako narzędzie do ćwiczenia obliczeń rachunkowych.

Jak zwykle, arkusz kalkulacyjny można zastosować, ale nie jest to konieczne. Wszystko zależy od celu lekcji. Jeśli zależy nam na tym, by uczniowie ćwiczyli obliczenia rachunkowe, nie korzystamy z programu. Jeśli natomiast chcemy, aby uczniowie dążyli do uogólnienia i poszukiwania ogólnego wzoru na podstawie treści zadania, wtedy arkusz kalkulacyjny będzie odpowiednim narzędziem.

Pozwala on na generowanie wielu izolowanych przykładów, które wskazują na ogólną relację. W tym przypadku chodzi o znany wzór algebraiczny: $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$, z konkretną wartością $b = 1$. Arkusz kalkulacyjny można też zastosować do podobnych zadań, które uczniowie opracują samodzielnie. Przykładowo, można zmieniać wartość b

(np. $b = 2, 3, 4, \dots$) i poszukiwać innych zależności we wzorze. Aby dojść do ogólnej zależności, zawsze istotne jest dokumentowanie poszczególnych, izolowanych przypadków – temu właśnie służy tabela po prawej stronie.

strona 73, zadanie 15 (Excel)

W edytorze arkuszy kalkulacyjnych został utworzony kwadrat tabliczki mnożenia. Uczniowie mogą go wykorzystywać do sprawdzania swoich rozwiązań. Bardziej zaangażowanych uczniów możemy zachęcić do samodzielnego stworzenia takiego kwadratu. Inną możliwością jest poszukiwanie reguły uogólniającej: jak na podstawie znajomości czterech narożnych liczb szybko znaleźć sumę liczb środkowych? W tym celu uczniowie potrzebowaliby większej liczby odizolowanych przypadków, a poszczególne rozwiązania powinni zapisywać w tabeli. Jest to raczej aktywność dla uczniów starszych klas szkoły podstawowej, ale może też stanowić dobrą inspirację dla uczniów zdolnych.

Komentarz do karty pracy:

Karta pracy została przygotowana z myślą o pracy z kwadratami tabliczki mnożenia. Pierwsze zadanie uczniowie mogą rozwiązywać indywidualnie – edytor arkuszy może służyć jako narzędzie kontrolne. Kolejne zadania zalecamy rozwiązywać raczej w małych grupach. Ich celem jest zdobycie przez uczniów doświadczeń prowadzących do ważnego odkrycia dotyczącego działania takich kwadratów. Polega ono na tym, że gdy dodamy do siebie przeciwległe liczby narożne i pomnożymy tę sumę przez sumę drugiej pary przeciwległych narożnych liczb, otrzymamy sumę liczb środkowych. W języku matematyki chodzi tu o przemnożenie dwóch nawiasów, z których każdy zawiera po dwa czynniki.

Nie mamy ambicji, aby w klasie 5 dojść do takiego odkrycia wspólnie z uczniami, choć być może niektórzy zdolniejsi uczniowie na to wpadną. Celem są jednak wspomniane doświadczenia. W zadaniach uczniowie poszukują kolejnych kwadratów mnożenia, w których sumy liczb środkowych będą się zgadzały. Gdybyśmy jednak chcieli „pozyskać” uogólniającą regułę, prawdopodobnie wymagałoby to większej liczby podobnych zadań i zapisu wyników np. w arkuszu kalkulacyjnym.

W starszych klasach uczniowie wracają do wspomnianej reguły m.in. za pomocą zadań polegających na stopniowym zmienianiu parametrów. Ich zasada polega na tym, że niektóre liczby narożne pozostają stałe, a inne się zmieniają – obserwuje się, co dzieje się z sumą liczb środkowych. Wszystko jest starannie zapisywane w tabeli. Takie zadanie znajduje się np. w podręczniku A 72/3. Tu przytaczamy je jedynie jako inspirację, gdyby ktoś zdecydował się odkrywać tę regułę wspólnie z uczniami.

Inne narzędzia TIK do zadań z podręczników

Celem tej części jest przedstawienie konkretnych narzędzi TIK, które mogą pomóc w nauczaniu. Za pomocą tych narzędzi można wizualizować różne sytuacje, modelować je, a tym samym rozwiązywać zadania lub je sprawdzać. Pokażemy również narzędzia, które uczniowie wykorzystują do rozwijania swoich kompetencji cyfrowych.

Ogólne narzędzia (do wykorzystania w różnych klasach i przy różnych tematach)

Kalkulator

Czasem ktoś nie zdaje sobie sprawy, że kalkulator – to także narzędzie TIK. Traktujemy go bowiem jako coś oczywistego w codzienności szkolnej. Trzeba jednak korzystać z kalkulatora efektywnie – czasami bowiem jego używanie może być wręcz szkodliwe. Na przykład w starszych klasach spotykaliśmy się z sytuacjami, w których uczeń potrafił obliczyć procent danej liczby za pomocą kalkulatora, ale bez niego już nie był w stanie tego zrobić. Takich sytuacji należy unikać.

Z praktycznych ćwiczeń z kalkulatorem podajmy jeden konkretny przykład z liczbami dziesiętnymi:

Nauczyciel lub uczeń podaje kolejno liczby dziesiętne o różnych rzędach wielkości, a zadaniem uczniów jest obliczenie ich sumy za pomocą kalkulatora. W tej aktywności uczniowie nie skupiają się jeszcze na regułach dodawania liczb dziesiętnych, lecz na poprawnym zapisie poszczególnych liczb i skupionej pracy z kalkulatorem. Wynik służy do szybkiej kontroli.

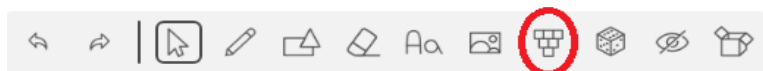
Taką aktywność można wykorzystać jako wprowadzenie na przykład w rozdziale Liczby dziesiętne w podręczniku A.

Collboard, <https://collboard.com/>

Po wejściu na stronę Collboard można wybrać potrzebny rodzaj tablicy. Jedną z opcji jest tablica z nazwą „Metoda Hejny’ego”. Jeśli wybierzemy uniwersalną „Pustą tablicę”, można bezpłatnie aktywować elementy metody Hejny’ego klikając ikonę otwartego pudełka (widoczną po prawej stronie). Po aktywacji ukaże się na pasku narzędzi ikona trójkąta do dodawania. Po jej rozwinięciu pojawi się lista dostępnych elementów – patrz niżej.

Gotowe ilustracje do poszczególnych środowisk mogą ułatwić i uatrakcyjnić zarówno prowadzenie lekcji, jak i przygotowanie do niej. Można je wykorzystywać do wyświetlania na tablicy podczas lekcji, bez konieczności czasochłonnego rysowania, do przygotowania materiałów – kart pracy, testów, pomocy dydaktycznych, a także do pracy grupowej z zadaniem, poprzez udostępnienie linku dowolnej liczbie uczniów.

Tablice zapisują się automatycznie wraz z wszystkimi dodanymi notatkami, więc można je przygotować wcześniej lub wrócić do nich na kolejnych lekcjach, albo udostępnić uczniom. Tablica jest nieskończona, a po kliknięciu ikony dłoni na prawym pasku narzędzi można ją dowolnie przesuwać. Uczniowie chętnie angażują się w odkrywanie kolejnych funkcji.



Aktywując element w czerwonej elipsie, otworzysz listę środowisk metody Hejny’ego, które można aktywnie wykorzystywać podczas zajęć. Na przykład do modelowania zadań z monetami można wykorzystać środowisko Monety – patrz ilustracja. Z monetami można następnie pracować, tworzyć zadania lub pokazywać ich rozwiązania. Typowym zadaniem, w którym można użyć takiego narzędzia, jest na przykład zadanie z podręcznika do klasy 5, numer 13/12.



Podobnie możemy pracować także z innymi środowiskami metody Hejny’ego.

Polypad, <https://polypad.amplify.com/p>

O aplikacji Polypad wspomnimy jeszcze kilkakrotnie w dalszej części. Ogólne informacje na temat wykorzystania aplikacji Polypad można znaleźć tutaj: <https://clanky.rvp.cz/clanek/23610/APLIKACE-POLYPAD.html>.

Kody QR

Wykorzystanie kodów QR możemy podzielić na ich odczytywanie i tworzenie. Niektóre urządzenia mają fabrycznie ustawioną opcję czytania kodów QR. Tak działa system iOS od Apple – wystarczy zaznaczyć odpowiednią opcję w ustawieniach aparatu. Użytkownicy systemu Android mają tę możliwość od wersji 9.0 Pie, czyli od 2018 roku.

W innym przypadku potrzebna jest aplikacja od firm zewnętrznych. W Internecie dostępnych jest ich bardzo wiele, wybór zależy od użytkownika.

Kody QR można tworzyć na urządzeniach mobilnych za pomocą aplikacji lub na komputerach dzięki darmowym generatorom QR, których obsługa jest bardzo prosta i do siebie podobna. Na przykład pod tym linkiem: <https://online-qr-generator.com/sk/>. Wybieramy, co chcemy zakodować (odnośnik do strony internetowej, tekst, obrazek, mapę lub coś innego). Następnie wklejamy treść, którą chcemy zakodować. Dalej ustawiamy wygląd kodu – kształt ramki, kolor i inne opcje. Po ustawieniu klikamy przycisk „Utwórz”. Następnie można kod pobrać w różnych formatach, udostępnić, skopiować np. za pomocą aplikacji „Wycinanie” lub wydrukować.

Jak wykorzystać kody QR w nauczaniu?

Korzyści z korzystania z kodów QR na lekcjach

1. szybkie udostępnianie adresów URL, które przeniosą wszystkich uczniów na stronę internetową, z którą mają pracować
2. element zaskoczenia – kiedy nie chcemy od razu ujawniać informacji, ukrywamy je pod kodem QR
3. zakodowanie poprawnych odpowiedzi (testów, quizów, zadań itp.)
4. zakodowanie fragmentów tekstu w kilku kodach QR; po ich odczytaniu zadaniem uczestników jest ułożenie całej historii
5. „wprowadzenie do lekcji” – wpisz temat lekcji lub projektu do tekstu w kodzie QR, wydrukuj go i porozcinaj, dopiero po jego poprawnym złożeniu uczniowie będą mogli go odczytać i zrozumieć
6. rozmieszczenie kodów QR w przestrzeni szkolnej, a następnie „polowanie” na kody – mogą służyć do sprawdzania poprawnych odpowiedzi, zawierać polecenia, wskazówki, informacje – wszystko zależy od tego, co do nich włożymy
7. kody QR jako element gry szafrowanej.

Konkretne pomysły

Możemy zakodować zadania obliczeniowe lub zadania tekstowe i rozmieścić je w klasie. W ten sposób aktywizujemy uczniów i urozmaicamy im naukę. Pracując w grupach, możemy rozwijać także inne umiejętności niż tylko matematyczne. Warto przygotować większą liczbę zadań, aby uczniowie musieli w ograniczonym czasie efektywnie i systematycznie współpracować oraz umieli dzielić się zadaniami w grupie.

Na przykład podczas aktywności Top 10 możemy rozmieścić w różnych miejscach klasy kody QR z informacjami o 10 „naj” – najwyższych górach, największych krajach, najdłuższych rzekach itp., a zadaniem uczniów będzie uporządkowanie informacji według określonych kryteriów.

Więcej pomysłów na wykorzystanie kodów QR w nauczaniu znajdziesz m.in. na tych stronach:

1. <https://www.ucimeonline.cz/courses/16-matematika-je-zabavna/lekce/vyuziti-qr-kodu-ve-vyuce-honba-za-pokladem-dokresli-si-kod/>
2. <https://www.ucimeonline.cz/courses/16-matematika-je-zabavna/lekce/vyuziti-qr-kodu-ve-vyuce-honba-za-pokladem-dokresli-si-kod/>
3. <https://www.i-sen.cz/clanky/9-qr-kody-budou-bavit>
4. <https://www.cojsemvyzkousela.cz/?p=9157>

Narzędzia TIK (geometryczne)

Geoboard online, <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

Aplikacja zastępuje w razie potrzeby pomoc dydaktyczną geoboard, służącą do pracy manualnej. Uczniowie zamiast korzystać z pomocy sensorycznych pracują w środowisku online. Można w nim zmieniać siatkę kwadratową i kołową, numerować kołowy układ (geoboard) itp. Narzędzie można wykorzystać np. w zadaniach 72/6 i 7 z podręcznika B.

Mathematikus, 3D geometrie, <https://www.mathematikus.de/cs/krychle-site-krychli-a-mnoho-dalsich-uloh>

W aplikacji uczniowie mogą w atrakcyjnej formie rozwiązywać różnorodne zadania z geometrii przestrzennej. Pracują z siatkami sześciątów, uzupełniają bryły 3D tworząc regularne obiekty itp. To dobre ćwiczenie orientacji w przestrzeni. W części „Dalsze zadania” można znaleźć kolejne ćwiczenia opracowane przez Danielę Bímovą. Wraz z zespołem przygotowała ona zestaw zadań skupiających się na różnych typach odwzorowań sześciennych brył i przyciętych sześciątów. Ćwiczenia te rozwijają wyobraźnię przestrzenną. Zadania zostały przygotowane w postaci dynamicznych apletów w programie GeoGebra i są dostępne w publikacji GeoGebry pod tytułem „Różne odwzorowania brył sześciennych i przyciętych sześciątów”.

Protractor, pomiar kątów w praktyce, <https://cs.piliapp.com/protractor/>

Podczas nauki o kątach można wykorzystać aplikację Protractor. Umożliwia ona pomiar kątów między dwoma obiektami na zdjęciu. Wystarczy skierować kamerę urządzenia cyfrowego na obiekty i aktywować narzędzie za pomocą kodu QR (patrz link). Dla uczniów jest to ciekawe urozmaicenie w porównaniu z ograniczonymi możliwościami szkolnego kątomierza. Narzędzie łączy nowo nabytą umiejętność – pomiar kątów – z praktycznym życiem oraz wykorzystaniem kodów QR. Aplikację można zastosować na przykład przy zadaniach z podręcznika B (rozdział Kąt, str. 5 i 6).

Potrzebne pomoce: urządzenie cyfrowe z aparatem fotograficznym i czytnikiem kodów QR, dostęp do Internetu.

Narzędzia TIK (algebra)

W aplikacji Polypad przedstawiamy możliwość pracy z płytkami algebraicznymi (tzw. algeblokami) przy rozwiązywaniu wyrażeń algebraicznych: <https://polypad.amplify.com/p#algebra-tiles>.

Narzędzia TIK (arytmetyka)

Math Learning Center (oś liczbowa), <https://apps.mathlearningcenter.org/number-line>

W tej aplikacji można ustawić oś liczbową według własnych potrzeb. Jest to bardzo praktyczne, na przykład przy wyświetlaniu na tablicy. Narzędzie to pomaga również w tworzeniu zadań do kart pracy i idealnie nadaje się do przygotowywania zadań o rosnącym stopniu trudności. Więcej o aplikacji można przeczytać tutaj: <https://zdroje.guruveskole.cz/ciselna-osa-number-line/>

To narzędzie można wykorzystać na przykład w rozdziale Oś liczbowa z podręcznika A.

Photomath, <https://photomath.com/>

Aplikacja Photomath została opracowana na telefony komórkowe i tablety. Dzięki wbudowanemu aparatowi fotograficznemu można zeskanować zadanie, równanie lub układ równań w formie drukowanej lub odręcznej, albo wprowadzić je za pomocą kalkulatora naukowego, który jest częścią aplikacji. Photomath natychmiast rozwiązuje dany problem matematyczny i przedstawia rozwiązanie krok po kroku, szczegółowo go opisując. Umożliwia również przygotowanie wykresu równania.

Nauczyciel powinien pokazywać uczniom, jak efektywnie korzystać z aplikacji. Celem nie jest uzyskanie wyniku szybko i bez wysiłku, lecz zdobycie innego spojrzenia na dany problem matematyczny oraz rozwijanie krytycznego myślenia. Ważna jest sama droga prowadząca do rozwiązania. Warto dyskutować z uczniami, czy proponowane rozwiązanie jest ich zdaniem najlepsze i dlaczego. Powinni oni tłumaczyć sobie nawzajem poszczególne kroki i rozmawiać o tym, jak ważna jest umiejętność zapisywania własnego toku myślenia w sposób zrozumiały dla innych.

Aplikacja może służyć jako pomoc przy wprowadzaniu nowego tematu, przewodnik do samodzielnej nauki lub narzędzie do sprawdzania poprawności rozwiązywanych zadań. Uczniowie uczą się korzystać z technologii cyfrowych w sposób świadomy i przemyślany.

Więcej pomysłów i informacji można znaleźć na przykład tutaj: <https://blogy.rvp.cz/photomath/>.

Polypad, modele ułamków – koło, <https://polypad.amplify.com/p#fraction-circles>

Praca z ułamkami często wymaga manipulacji pomocami dydaktycznymi, rysowania ułamków, itd. Narzędzie ICT Polypad umożliwia wizualizację takich modeli ułamków, co może być dobrym uzupełnieniem wspomnianych metod. Oprócz pracy z ułamkami, aplikacja Polypad pozwala również pracować w wielu innych obszarach matematyki – np. tangramy, figury geometryczne, bryły 3D itp.

To narzędzie można wykorzystać we wszystkich zadaniach dotyczących ułamków, gdzie wskazane jest korzystanie z modeli ułamków – na przykład w rozdziale „Ułamki I” w podręczniku A.

Polypad, modele ułamków – mur ułamków, <https://polypad.amplify.com/p#fraction-bars>

W aplikacji Polypad warto również wspomnieć o wykorzystaniu muru ułamków. Jest to bardzo przydatna pomoc przy pracy z ułamkami – do ich porównywania, porządkowania czy wykonywania na nich działań arytmetycznych.

Z murem ułamków pracuje się na przykład w zadaniu 28/7 w podręczniku dla klasy 5.

Zepsuty kalkulator, https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp?Level=1

Jest to aplikacja internetowa lub kalkulator, w którym niektóre przyciski są „zepsute” i uczniowie mają za zadanie dojść do podanego wyniku, wykonując działania tylko przy użyciu pozostałych działających przycisków. W ten sposób ćwiczą zasady kolejności działań na kalkulatorze. Jest to podobny typ zadań, jaki uczniowie rozwiązują w znanym środowisku Hejny’ego lub w popularnej grze Abaku.

Narzędzia TIK (praca z danymi)

Drzewo genealogiczne w środowisku tematycznym „Rodzina”, mapy myśli

Uczniowie mogą samodzielnie stworzyć drzewo genealogiczne za pomocą różnych narzędzi online. Istnieje możliwość opracowania drzewa genealogicznego własnej rodziny, jednak dla niektórych uczniów może to być temat drażliwy. Dlatego dobrą alternatywą jest połączenie tego zadania z innymi przedmiotami szkolnymi (np. informatyką, historią...) i poproszenie uczniów o stworzenie drzewa genealogicznego wybranej postaci historycznej lub współczesnej, znanej z nauki, kultury czy sportu.

Drzewa genealogiczne można tworzyć przy użyciu szablonów w MS Word lub MS Excel, w dokumentach Google, w MS PowerPoint albo w innych narzędziach do mapowania, które są dostępne online za darmo i nie wymagają instalacji – np. MindOnMap: <https://www.mindonmap.com/cs/blog/family-tree-template/>.

Podobnym pomysłem jest tworzenie map myśli. W tym celu można skorzystać np. z następującego linku: <https://www.veskole.cz/clanky/myslenkove-mapy-a-jejich-tvorba-online>

Spis źródeł:

<https://www.h-mat.cz/principy>
https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_generick%C3%BDch_model%C5%AF
<https://clanky.rvp.cz/clanek/23440/VYUZITI-DIGITALNICH-TECHNOLOGII-VE-VYUCE-MATEMATIKY-NA-GYMNAZIICH.html>
<https://digitalizace.rvp.cz/co-se-meni/digitalni-kompetence#co-to-je>
<https://zdroje.guruveskole.cz/ciselna-osa-number-line/>
<https://apps.mathlearningcenter.org/number-line>
<https://www.veskole.cz/clanky/myslenkove-mapy-a-jejich-tvorba-online>
<https://www.mindonmap.com/cs/blog/family-tree-template/>
<https://collboard.com/>
https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp?Level=1
<https://www.mathematikus.de/cs/krychle-site-krychli-a-mnoho-dalsich-uloh>
<https://polypad.amplify.com/>
<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>
Samková, Libuše (2020), Metoda Concept Cartoons. České Budějovice: Pedagogické fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích
<https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>
<https://polypad.amplify.com/p#algebra-tiles>
<https://clanky.rvp.cz/clanek/23648/ALGEBRAICKE-DLAZDICE-MNOHOCLENY.html>
<https://clanky.rvp.cz/clanek/23610/APLIKACE-POLYPAD.html>
<https://www.teacherled.com/iresources/numeracybasics/?resource=numbersquare>
<https://www.storyboardthat.com/>
<https://digigram.cz/rozvoj-digitalni-gramotnosti-matematika/>
<https://dai.fmph.uniba.sk/~borovan/HM/>
<https://www.teacherled.com/iresources/charts/venns/>
<https://www.npi.cz/images/publikace/DigCompEdu.pdf>
<https://photomath.com/>
<https://blogy.rvp.cz/photomath/>
<https://online-qr-generator.com/cs/>
<https://www.ucimeonline.cz/courses/16-matematika-je-zabavna/lekce/vyuziti-qr-kodu-ve-vyuce-honba-za-pokladem-dokresli-si-kod/>
<https://www.ucimeonline.cz/courses/16-matematika-je-zabavna/lekce/vyuziti-qr-kodu-ve-vyuce-honba-za-pokladem-dokresli-si-kod/>
<https://www.i-sen.cz/clanky/9-qr-kody-budou-bavit>
<https://www.cojsemvyzkousela.cz/?p=9157>

